UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS – CCH
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Teresinha Valente Soares

O QUE REVELAM AS RESPOSTAS DOS ESTUDANTES DO 4º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O CONCEITO DE FRAÇÃO QUANDO APRESENTADO ATRAVÉS DE UM MODELO QUE PRIORIZA O SUBCONSTRUTO PARTE-TODO

RIO DE JANEIRO
2013

TERESINHA VALENTE SOARES

O que revelam as repostas dos estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração quando apresentado através de um modelo que prioriza o subconstruto parte-todo.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Prof(a) Dra. Mônica Cerbella Freire Mandarino

Rio de Janeiro

2013

Soares, Teresinha Valente.
S676 O que revelam as respostas dos estudantes do 4°ano do ensino fundamental sobre o conceito de fração quando apresentado através de um modelo que prioriza o subconstruto parte-todo / Teresinha Valente Soares, 2013.
93 f. ; 30 cm

Orientadora: Mônica Cerbella Freire Mandarino.
Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

1. Fração - Estudo e ensino. 2. Didática. 3. Material manipulativo. I. Mandarino, Mônica Cerbella Freire. II. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Centro de Ciências Humanas e Sociais. Mestrado em Educação. III. Título.

CDD 370.71

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS - CCH
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TERESINHA VALENTE SOARES

O que revelam as repostas dos estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração quando apresentado através de um modelo que prioriza o subconstruto parte-todo

Aprovado pela Banca Examinadora

Rio de Janeiro, ___/___/___

____

Professora Doutora Mônica Cerbella Freire Mandarino

Orientadora – UNIRIO

____

Professora Doutora Lilian Nasser – UFPE

____

Professora Doutora Lígia Martha Coimbra da Costa Coelho – UNIRIO

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade de aprender com tantas experiências vividas.

Aos meus pais, José Paulo e Maria, referência de vida, coragem e fé.

Ao meu afilhado Marcio Vianna Valente, que ilumina minha vida.

Ao meu irmão Silvio Alberto, pelo incentivo e apoio constante.

À Profª Drª Mônica Mandarino, pela orientação competente, me encaminhando no meio acadêmico.

À Profª Drª Lilian Nasser, que sempre me guia para um crescimento profissional e pessoal.

À Profª Drª Lígia Martha Coelho e toda a equipe de acompanhamento do Programa de Mestrado da UNIRIO, pelo acolhimento e incentivo.

À inesquecível Profª Drª Maria Laura Lopes, pelo aplauso que tanto me incentivou na vida profissional.

Aos amigos Silvia Couto, Antonia Santos e Múcio Medeiros, parceiros de vida.

À s amigas Andreia Almeida e Flávia Renata Coelho, pelo incentivo constante, pelas sugestões e revisões. Uma amizade incondicional, um presente da vida.

Aos meus primos, pelo incentivo e apoio que só os irmãos sabem dar.

Aos integrantes do grupo de pesquisa LIMC-Mais, que colaboram na produção do material manipulativo e na elaboração da sequência didática usados nesta pesquisa.

À equipe da Coordenadoria Técnica/SME, sobretudo na pessoa do Prof. Antonio Augusto.

Ao Colégio Pedro II, que possibilitou a realização deste estudo em uma de suas unidades.

Às professoras e alunos que participaram desta pesquisa.

Às escolas onde trabalhei, aos colegas educadores e jovens com quem convivi e que oportunizaram minhas reflexões e o refazer da minha prática.

Ontem um menino que brincava me falou
Hoje é a semente do amanhã
Para não ter medo que este tempo vai passar
Não se desespere nem se canse de sonhar
Nunca se entregue, nasça sempre com as manhãs
Deixe a luz do sol brilhar no céu do seu olhar
Fé na vida, fé no homem, fé no que virá
Nós podemos tudo, nós podemos mais
Vamos lá fazer o que será.”

(*Nunca pare de sonhar*, Gonzaguinha)

RESUMO

Estudos na área de Educação Matemática indicam dificuldades relacionadas ao tema frações. Neste sentido, temos o trabalho de Vasconcelos e Belfort (2006), que alertam quanto a um ensino de frações alicerçado em regras e procedimentos. Temos também a pesquisa de Kerslake (1986), recomendando que se tenha cuidado na ampliação dos números naturais para os números fracionários, em função da mudança da lógica de construção destes campos numéricos. Além disso, diversos autores (Kieren, 1981; Behr et al., 1983; Nunes e Bryant, 1997) apontam para a complexidade do conceito de fração e que portanto, para sua compreensão, é necessário que sejam apresentados aos estudantes seus subconstrutos. Desta forma, para contribuir com as reflexões sobre as possibilidades de superação dos entraves citados, investigamos que conhecimentos as crianças expressam sobre o conceito de fração, quando este é apresentado através de uma sequência didática que prioriza o subconstruto parte-todo e o quanto as diferentes formas do material manipulativo oferecido podem favorecer o desprendimento do formato das partes em relação a uma mesma unidade. Realizamos esta investigação numa escola pública federal em que os alunos apresentam uma diversidade de experiências de aprendizagem. Analisamos a produção escrita dos estudantes. buscando compreender como pensaram, relacionando-as com as aplicações da sequência didática. Para compor o campo de análises teóricas utilizamos os estudos de Hart et al. (1981), Behr et al. (1983) e Ball (1993), entre outros. As respostas dos alunos nos levaram a três grupos de respostas. Tivemos um grupo que demonstrou dificuldade de expressão escrita; outro que se fixou na atividade que acabara de realizar e ainda o grupo que se apoiou na conceituação de área. Houve certo equilíbrio entre o percentual de incidência de respostas que caracterizam o segundo e o terceiro grupos, 50% das respostas e 44%, respectivamente.

Palavras-chave: Aprendizagem de frações; Sequência Didática; Material Manipulativo; Subconstruto parte-todo.

ABSTRACT

Studies in the field of mathematics education indicate difficulties related to the theme fractions. Therefore, we have work Vasconcelos and Belfort (2006) warn that as a teaching fractions grounded in rules and procedures. We also research Kerslake (1986) recommends caution in expanding the natural numbers to fractional numbers due to the change of the logic of construction of these numeric fields. In addition, several authors (Kieren, 1981, Behr et al., 1983; Nunes e Bryant, 1997) point to the complexity of the concept of fraction and therefore, for your understanding, needs to be presented subconstructs to their students. In this way, to contribute to the discussions on the possibilities of overcoming the obstacles mentioned, we investigate what knowledge children express about the concept of fraction, when this is presented through an instructional sequence that prioritizes subconstruct part-whole, and how the various forms of manipulative material can favor the detachment given the shape of the parts in relation to the same unit. We conducted this research in a federal public school where students have a variety of learning experiences. Analyzed the written production of students seeking to understand how thought and relating them to the applications of the instructional sequence. To compose the field of theoretical analysis used studies Hart et al. (1981) Behr et al. (1983) and Ball (1993), among others. Student responses led us to three groups of responses. We had a group that demonstrated the difficulty of writing, which stood in another activity that helped him achieve and also the group that supported the concept of area. There was a certain balance between the percentage incidence of responses that characterize the second and third group, 50% of respondents and 44%, respectively.

Keywords: Learning fractions; Sequence Curriculum; Material Manipulative; subconstruct part-whole.

SUMÁRIO

Introdução

Nos primeiros anos da minha carreira como professora de Matemática no segundo segmento do Ensino Fundamental, minha prática era essencialmente tradicional, reproduzindo minha vivência como aluna. Aos poucos, a insatisfação com os resultados alcançados por meus alunos me causava questionamentos. Refletindo sobre estes insucessos, busquei recursos e iniciei estudos teóricos Depois de certo tempo, conheci jogos e outros materiais manipulativos que poderiam facilitar o processo de aprendizagem dos alunos. Fui observando que, na medida em que eu amadurecia profissionalmente, meus alunos conseguiam aprender o que eu propunha com mais facilidade.

Percebi a necessidade de repensar o significado da prática pedagógica, de ressignificá-la com o intuito de evitar erros do passado, quando os alunos que evidenciavam dificuldades de aprendizagem, que engrossavam os índices de evasão e repetência, eram deixados à margem do processo educacional. Além disso, observei que ao escolher um recurso apropriado, pode-se proporcionar aos alunos situações que favorecem descobertas, além de provocar a discussão das soluções, levantamento de hipóteses, questionamentos a respeito das estratégias desenvolvidas e apropriação de conceitos.

Vivenciei que, para reconstruir essa prática, é necessário compreender as diversas possibilidades que esta escolha pode oferecer, tais como investigação de repertório dos alunos, motivação, proposição de desafios, sistematização de conceitos, avaliação contínua do processo de aprendizagem, retomada ou aprofundamento de conteúdos, elaboração e re-elaboração de conceitos, ou resgate do que foi perdido durante o processo.

Deste modo, minha busca por reconstruir o meu fazer pedagógico visava atingir os muitos alunos que apresentavam maior dificuldade de aprendizagem em Matemática. Alguns deles chegavam a demonstrar uma relação de medo com a disciplina. E essa relação resultava, em muitos casos, de experiências frustrantes e fracassadas com o conteúdo de referência, destacando-se entre elas, o estudo de frações.

Tanto na rede privada de ensino quanto na rede pública da cidade do Rio de Janeiro, como professora regente, eu percebi a dificuldade dos meus alunos na aprendizagem de frações e consegui minimizá-las, usando recursos como jogos e materiais manipuláveis. Mas, meu trabalho era solitário, o professor especialista não tem como prática planejar e agir coletivamente. Mesmo quando reuniões de área faziam parte do meu horário de trabalho, este tempo era direcionado para avisos ou reclamações. Este espaço, tão reivindicado por docentes, não tinha foco na integração do grupo de professores e nem na reflexão acerca do fazer pedagógico. Raramente eram cogitadas leituras para embasamento teórico ou troca de experiências de sala de aula.

Depois, como integrante da equipe da Coordenadoria Técnica da Secretaria Municipal do Rio de Janeiro, fui coautora do Caderno de Apoio Pedagógico, numa edição especial sobre frações e decimais. Nesse sentido, mais uma vez, minha ação profissional estava direcionada a buscar caminhos que contribuíssem para a aprendizagem de frações. E, na carta de apresentação deste caderno temos que:

> [...] Nas Avaliações realizadas pela Rede, os alunos do 6° ao 9° anos tiveram baixo desempenho nas questões relacionadas a frações e decimais. Em quase todas as questões desses temas, em todos os anos, o percentual de acerto foi inferior a 50%. Dessa necessidade é que surgiu o Caderno de Frações e Decimais, com o intento de aprofundar os conceitos relacionados ao estudo de frações e decimais e outros associados. [..] (NASSER et al, 2009, p. 3)

Na medida em que estas experiências profissionais aconteciam, o desejo pela pesquisa sobre o ensino de frações se tornou mais forte. Inicialmente minha leitura teve foco no trabalho de Nunes e Bryant (1997), que sinalizam a dificuldade de aprendizagem dos números racionais na forma fracionária e alertam que, mesmo quando alunos mostram habilidades nos cálculos, não significa que eles se apropriaram dos significados desses números. Estes autores usam, como exemplo desta dificuldade, a pesquisa de Campos e Cols (1995)[1], que conseguiu mostrar que introduzir o estudo das frações através de diagramas pode conduzir os alunos a erro, porque encoraja os estudantes a “empregar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas – sem entender o significado deste novo tipo de número.” (NUNES; BRYANT, op. cit., p.191).

---

[1]Nunes e Bryant (1997) tomaram como referência para apresentar este exemplo um Relato de Pesquisa não publicado da investigação feita por Campos e Cols (1995), no Brasil, em São Paulo.

Outra referência para Nunes e Bryant (1997) foi a pesquisa de Kerslake (1986), que procurei conhecer para meu aprendizado. Esta investigação foi realizada na Inglaterra e buscou compreender o grau de entendimento que estudantes, com idade entre 11 e 15 anos, tinham sobre frações. Os dados desta pesquisa foram coletados através de entrevistas e testes com os educandos. As análises destas informações levaram a conclusões tais como: o uso de diagramas foi o meio mais confortável para os alunos estudarem as frações e os entrevistados apresentavam dificuldade em reconhecer fração como resultado de uma divisão, demonstrando que não a compreendiam como um número.

Estas leituras me estimularam a procurar outros caminhos para aprofundar meus estudos. Assim, busquei o mestrado em educação da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), vinculada à linha de pesquisa Práticas Educativas, Linguagens e Tecnologias, na área de Educação Matemática e Práticas Docentes. Além disso, passei a participar do grupo de pesquisa do Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências (LIMC), vinculado à UNIRIO e à Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), coordenado pelo Professor Luiz Carlos Guimarães. Como extensão do LIMC, o grupo da UNIRIO, sob a responsabilidade da Professora Mônica Mandarino, tem se dedicado ao campo do ensino de conceitos estruturantes, cujos primeiros contatos ocorrem nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Por isso, este subgrupo se batizou como LIMC-Mais, por ter como foco principal os conteúdos, hábitos e posturas em relação à Matemática dos Anos Iniciais.

O projeto de pesquisa do LIMC, intitulado *Jogos e Frações*, nasceu no final do ano de 2004, quando o grupo foi convidado pela Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEE-RJ) para a formação de uma parceria de trabalho que visasse à melhoria do ensino de frações. Segundo a SEE-RJ, conforme testes aplicados pelo Estado, cerca de 60% dos alunos chegariam ao ensino médio apresentando sérias dificuldades em lidar com este campo numérico. Buscando atender esta demanda, foram estabelecidas algumas metas que envolveram a criação de jogos e a realização de cursos de formação continuada para professores licenciados em Matemática.

Ao integrar o grupo LIMC-Mais, a atividade investigativa deste grupo tinha como objetivos o aperfeiçoamento e a ampliação das propostas de jogos e ações produzidas anteriormente. Assim, o grupo de pesquisa passou a refletir, propor e testar materiais e atividades voltados para a construção dos primeiros conceitos de fração, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, procurávamos contribuir para a formação continuada em Matemática dos professores dos anos iniciais.

Para embasar as tarefas pertinentes a este projeto, nos debruçamos em estudos relacionados ao ensino de frações. Foram feitas leituras específicas sobre frações, cujas referências são Kieren (1981), Behr et al. (1983) e Kerslake (1986). Na perspectiva pedagógica, contamos com as contribuições de Guzman (1990) para que nos preparássemos para uma utilização criteriosa de jogos e de Chevallard (2001), Vila e Callejo (2006), Esteban (2002), Pinto (2000), Cury (2007), que abordam a questão do erro sob uma ótica propositiva.

Além de uma pesquisa bibliográfica, por meio do estudo exposto acima, buscávamos construir atividades que se caracterizassem como problemas, ou seja, que não se configurassem como mera apresentação de conceitos ou como exercícios para treinamento. Neste caso, nossas referências são Polya (2006)[2] e as recomendações contidas nos PCN dos anos iniciais do Ensino Fundamental:

> [...] é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução.
> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos. (BRASIL, 1997, v.3, p.33)

Em outros momentos, nos dedicávamos às reflexões relacionadas às práticas que pudessem melhorar o ensino e qualificar a aprendizagem de frações. Estas reflexões e estudos deram origem ao processo de construção de uma sequência didática usando um material manipulativo, que no primeiro momento recebeu o nome de Jogo das Partes.

A metodologia de pesquisa adotada pelo LIMC-Mais em relação ao projeto do campo das frações segue o modelo conhecido como *Lesson Study* (Pesquisa de Aula). Esta metodologia se baseia na reflexão e construção de práticas de forma

[2] A primeira edição do livro de George Polya, cujo título original é How to solve it, data de 1944.

coletiva por um grupo de professores de uma mesma disciplina, de um mesmo ano escolar ou com interesse comum em um tópico do currículo. Este trabalho traz à tona os saberes dos docentes, as crenças e práticas adotadas, para que juntos, projetem e testem mudanças.

Cabe ressaltar que o projeto de pesquisa do LIMC-Mais - *Jogos e Frações* - é amplo, abarcando explorações no campo do ensino, da aprendizagem, da metodologia e de recursos didáticos. O que apresentamos nesta dissertação é um dos subprojetos possíveis do programa mais amplo de pesquisa do grupo.

A motivação principal deste trabalho se baseia nas recomendações de Kerslake (1986) quanto aos cuidados que se deve ter em relação à passagem dos números naturais para os números fracionários e em relação ao uso do subconstruto[3] parte-todo, que pode se configurar como limitado. Nosso desejo é propiciar reflexões sobre o conceito de fração e sobre as possibilidades de compreensão dos alunos que começam seus estudos deste campo numérico. Pretendemos contribuir para um ensino eficaz, evitando que a falta entendimento deste conteúdo impeçam que estudantes avancem nos seus estudos.

Como parte do grupo de pesquisa LIMC-Mais desenvolvia um trabalho para introdução do estudo de frações através do subconstruto parte-todo, levantamos a seguinte questão:

O modelo utilizado para a apresentação do conceito de fração, através do subconstruto parte-todo, possibilita aos alunos o desprendimento do formato das partes em relação a uma mesma unidade?

Nosso objetivo foi investigar que conhecimentos as crianças expressam sobre o conceito de fração, quando este é apresentado através de uma sequência didática que prioriza o subconstruto parte-todo e o quanto as diferentes formas do material manipulativo oferecido podem favorecer o desprendimento do formato das partes em relação a uma mesma unidade. Para isso, utilizamos os dados provenientes de observações e da produção dos estudantes, durante a aplicação da sequência didática produzida pelo grupo de pesquisa LIMC-Mais.

[3] As ideias de fração são os subconceitos que promovem a compreensão do conceito deste campo numérico. Podem ser chamadas também de significados ou subconstrutos. No primeiro capítulo deste texto adensaremos esta discussão.

A apresentação deste trabalho está organizada em quatro capítulos, conforme descrevemos a seguir.

No primeiro capítulo apresentamos pesquisas relevantes e recentes sobre o ensino de frações. Trazemos também as ideias relacionadas à construção do conceito de fração destacando as contribuições significativas de Kieren (1976; 1992), Kerslake (1986), Behr et al. (1983), Wu (2002), Hart et al. (1981), Ball (1993), Vasconcelos e Belfort (2006), Mandarino (2010) , Nunes e Bryant (1997).

O segundo capítulo trata da metodologia. Nele justificamos o contexto da pesquisa, caracterizando o local, os participantes e delineando os procedimentos usados nas observações da sequência didática.

Dedicamos o terceiro capítulo à análise dos dados. Relatamos a aplicação da sequência didática, o que os estudantes participantes responderam às situações propostas e indicamos a relação entre a atuação de cada professora e o desempenho destas respostas.

Em seguida, nas considerações finais, apresentamos as conclusões da pesquisa e as reflexões sobre as possibilidades de ações para melhoria do ensino de frações.

1 – O Conhecimento sobre Frações

Eu quero desaprender para aprender de novo.
Raspar as tintas com que me pintaram.
Desencaixotar emoções, recuperar sentidos.

Rubem Alves[4]

Neste capítulo, apresentamos a fundamentação teórica que embasa este trabalho, bem como as pesquisas que convergem para o tema da nossa investigação. Como disse Rubem Alves: “Eu quero desaprender para aprender de novo.” Para isso, precisamos ter outras e novas referências, organizar e fazer delas um norte, recuperando o sentido de aprender e ensinar.

1.1 – O Construto Fração no 2º Ciclo de Escolaridade

A importância da formação matemática é destacada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais[5], como se lê no trecho abaixo.

> A constatação da sua importância apóia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. (BRASIL, 1997, v.3, p.15).

Neste mesmo documento (BRASIL, 1997) se reconhece que “há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno.” (v.3, p.15).

No caso do conceito em foco nesta dissertação, as frações, a “concepção utilitária ou instrumental” (MANDARINO, 2006, p.213) de ensino é um dos entraves, como reconhecem Vasconcelos e Belfort (2006):

> [...], como muitos outros temas de matemática, seu ensino limita-se em geral, à aplicação de fórmulas e regras, sem que os alunos entendam muito bem o que estão fazendo. E, no caso específico das frações, muitas vezes a explanação limita-se a algumas ideias particulares, sem abranger todas as ideias que lhes são associadas. São fórmulas e regras desprovidas de significados e que devem ser memorizadas e repetidas. (VASCONCELOS E BELFORT, 2006, p.39).

[4] Disponível em http://pensador.uol.com.br/poesias_de_rubem_alves/ Acesso em 23 set. 2012.

[5] Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram propostos pelo Ministério da Educação e do Desporto (MEC), em 1997. O documento objetivava apontar metas de qualidade que ajudassem “o aluno a enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, conhecedor de seus direitos e deveres”. (BRASIL, 1997, v.1, p.5).

Para Santos e Rezende (1996, p.11) outro problema relacionado ao ensino das frações “decorre do fato de que terão que alterar as concepções que eles (alunos) têm sobre o que é uma quantidade numérica”. Hiebert & Behr (1988 apud Santos e Rezende, 1996) afirmam que:

> Crianças não percebem um número racional, ou fração, como um simples número. A ideia de que fração é um par de números naturais [isolados] persiste em muitas crianças por um período de tempo considerável mesmo depois de terem iniciado o estudo de números racionais... (apud Ibid, p.12).

Além das dificuldades no ensino, baseado em regras e procedimentos e da necessidade de superar a lógica de construção dos números naturais, é preciso levar em conta a complexidade do conceito de fração, como discutem os autores que apresentamos a seguir.

Nunes e Bryant afirmam que “as crianças podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza” (1997, p.193). E a seguir, advertem quanto “aos perigos que existem por trás da complexidade e da diversidade dos conceitos envolvidos em frações e números racionais.” (p.193). Isto é, para compreender o conceito de frações é necessário que se entenda os subconceitos que compõem o conceito deste campo numérico.

Vasconcelos e Belfort (2006) nomeiam como ideias ou significados os subconceitos que promovem a construção do conceito de frações. Mandarino (2010) chama estes subconceitos de aplicações ou ideias. Romanatto (1999) usa termos como personalidades ou contextos significativos para falar sobre estes subconceitos.

Kieren (1981), pesquisador matemático que influenciou outros pesquisadores em investigações sobre frações, tais como Behr et al (1983) e Romanatto (1999), considerou quatro subconceitos como construtores do constrtuto fração: medida, quociente, razão e operador, chamando-os de subconstrutos.

Buscando compreender o significado de construto e subconstruto, encontramos em Canova (2006), que diz que “podemos entender ¨construto¨ como sendo conceito e ¨subconstrutos¨ como os pequenos conceitos que juntos formam o conceito maior.” (p. 35).

Neste texto, nomearemos o conceito de fração como um constructo, conforme a referência de Kieren (1981). Os “pequenos conceitos”, como explicou Canova (Ibid.), que fazem a composição do construto fração, serão considerados por nós como subconstrutos. Destacamos quatro subconstrutos que apresentaremos a seguir.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam que ampliação do campo numérico de naturais para racionais ocorra no 2º ciclo de escolaridade e trazem como um dos objetivos para o ensino de Matemática neste ciclo ¨construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social ¨ (BRASIL, 1997, v.3, p. 55):

> Neste ciclo são apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal. (Ibid., p. 57)

Sendo assim, para a presente discussão, seguiremos as diretrizes dos PCN trazendo os subconstrutos: parte-todo, razão, quociente e, apresentaremos o subcontruto ponto na reta numérica porque, para Mandarino (2010), ele pode preparar para abstrações futuras relacionadas ao conceito de fração. Acreditamos que estes quatro subconstrutos contribuem para a promoção da compreensão do construto fração no 2º ciclo de escolaridade.

Subconstruto parte-todo

Segundo Mandarino (2010, p.108), este subconstruto é o mais usual. Nele a fração pode ser pensada como parte de um todo que é expresso por uma grandeza contínua. O contexto intuitivo para este caso são as partições de chocolate e pizza. Assim, quando nos referimos à fração 3/4 temos que um todo foi dividido em quatro partes iguais e se tomou três dessas partes como na representação a seguir.

O todo é uma grandeza discreta, associando uma fração a um subconjunto de um conjunto. Portanto, na segunda figura, de um conjunto com 4 elementos, cada subconjunto com 3 elementos corresponde a 3/4.

Vasconcelos e Belfort (2006) dividem este subconstruto em dois, um para grandeza contínua e outro para grandeza discreta. O primeiro subconstruto descrito é a de parte-todo considerando grandezas contínuas e o segundo é o que associa frações a subconjuntos de conjunto, podendo “ser considerada como uma variante da ideia anterior para o caso de grandezas discretas.” (p.41).

Mandarino (2010) também usa dois subconstrutos, que ela chama de ideias, para discorrer sobre parte-todo em orientações para professores das séries iniciais. Segundo esta pesquisadora, para a compreensão da fração como parte de uma grandeza contínua que será dividida em partes iguais é importante que sejam propostos vivências concretas aos alunos. E, a partir destas experiências, pode-se introduzir a representação simbólica e a nomenclatura das frações. Quando se trabalha com o subconstruto parte/todo de uma coleção de objetos, o sentido operatório se destaca e, os elementos que representam o subconjunto desejado podem não ser idênticos, mas os agrupamentos feitos precisam ter a mesma quantidade de elementos.

Mauro Romanatto (1999), outro pesquisador brasileiro, não faz distinção explícita quanto ao todo ser um conjunto discreto ou não; explica que devemos dividir a unidade em partes iguais e tomar um determinado número delas, independentemente da natureza desta unidade. Exemplos como 2/3 de uma pizza (grandeza contínua) ou 2/3 de um grupo de nove pessoas (grandeza discreta) são dados para este subconstruto, reforçando que este pesquisador não faz esta diferenciação entre as grandezas.

Nunes e Bryant (1997) estudaram a compreensão das crianças sobre as relações em divisão com quantidades descontínuas e contínuas, como se pode perceber a seguir:

> Consideremos o que acontece quando crianças novas são solicitadas a trabalhar com barras de chocolate em vez de conjuntos de doces sendo distribuídos: elas são capazes de entender a relação inversa entre o tamanho de *n* no *n-corte* com quantidades contínuas assim como fazem no contexto da divisão dos conjuntos? Há poucas evidências sobre esta questão, infelizmente, e nenhuma, até onde sabemos, que compare diretamente a compreensão das crianças das relações em divisão com quantidades descontínuas e contínuas. (Ibid., p.196-197).

Entretanto ao final do tópico que trata deste assunto, na mesma página, esses pesquisadores se posicionam quanto a esta comparação escrevendo:

> Mais pesquisas são claramente necessárias, mas podemos razoavelmente esperar que um bom número de crianças [...] serão capazes de entender o efeito do tamanho de n em n-corte quando quantidades contínuas estiverem envolvidas. Estas habilidades claramente precedem o conhecimento das crianças de representações fracionais e sua habilidade de calcular com frações. (NUNES e BRYANT, 1997, p.197).

Nunes e Bryant (Ibid.) assinalaram o que é comum a quem trabalha diretamente com crianças que iniciam seus estudos com frações. Mandarino (2010) faz a recomendação para os professores para que comecem o trabalho com frações por parte-todo de grandezas contínuas primeiramente e separadamente de parte-todo de grandezas discretas, para que seja respeitado o que é intuitivo nas crianças e o que elas trazem de conhecimento prévio. O mesmo ocorre com Vasconcelos e Belfort (op.cit), que promovem a discussão da prática através do texto que produziram. Entretanto, neste texto optamos por mantê-los condensados num único subconstruto por acreditarmos que a divisão entre eles se refere mais a forma como se poderia trabalhar na sala de aula, do que propriamente uma questão conceitual.

Inerente a este subconstruto, há também a questão da conceptualização da unidade em diversos contextos. Até se iniciar o estudo das frações, os alunos conheciam o termo unidade como referência de uma ordem, como no caso do número 238 em que o algarismo 8 ocupa a ordem das unidades. Poderiam também saber o significado da unidade em relação às vivências cotidianas como uma caixa de ovos com 12 unidades. Para compreender este subconstruto é necessário identificar o todo ou a unidade nas diversas situações. Por exemplo: pegar dois pedaços de uma torta que foi dividida em cinco partes iguais, a unidade é a torta; ou tomar dois lápis de um conjunto de cinco lápis, o todo ou unidade são os cinco lápis. Nos dois casos exemplificados temos como representação a fração 2/5, mas a unidade envolvida não é a mesma.

Gomes (2010), em sua dissertação de mestrado, faz uma observação:

> Ainda falando da conceitualização da *unidade*, destaca-se a dificuldade, mesmo para o aluno que já compreendeu o significado de fração como *parte-todo*, entender o que realmente significa calcular 1/2 de 1/3, em que a fração 1/3 passa a representar o *todo*. Tal compreensão é fundamental para as operações de multiplicação e divisão de frações que serão apresentadas mais adiante. (Ibid., p. 17).

Podemos então afirmar que o ensino de frações requer cuidados especiais e que o professor que se propõe a promover este estudo precisa ter consciência desta complexidade.

Subconstruto razão

Neste caso, usamos as frações para representar uma comparação entre grandezas que podem ser contínuas ou discretas como no subconstruto parte-todo. Esta comparação é chamada de razão.

Assim, a fração 2/3 é o resultado da comparação de duas medidas de uma mesma grandeza que estão na razão 2 para 3. No caso discreto, isto significa que das 5 unidades, 2 são de um tipo e 3 são de outro. Na representação a seguir temos 5 figuras, sendo 2 triângulos e 3 retângulos.

Observamos, então, que a comparação não é entre uma parte e o todo, mas entre as duas partes que formam este todo. Portanto, no exemplo acima temos que as figuras estão na razão de 2 para 3, ou seja a razão entre elas pode ser representada pela fração 2/3.

Seguindo este raciocínio, podemos comparar a quantidade entre meninos e meninas de um grupo de crianças ou a quantidade entre brigadeiros e quindins de um conjunto de doces, obtendo razões entre grandezas discretas. A comparação entre as alturas de dois edifícios ou a área de dois apartamentos envolvem razões de grandezas contínuas.

Para este subconstruto, Vasconcelos e Belfort (2006) não separam as ideias relacionadas às grandezas discretas e às grandezas contínuas. Entretanto, Mandarino (2010) conduz as orientações sobre razão separadamente, de acordo com a natureza das grandezas. De qualquer modo, mais uma vez, o professor precisa se apropriar de todas estas nuances para oferecer aos alunos a oportunidade de vivenciar diferentes significados das aplicações dos números fracionários.

Subconstruto quociente

Neste subconstruto a fração é tida como quociente ou resultado da divisão entre dois números naturais, apresentados como numerador e denominador. Nas séries finais do ensino fundamental esta operação pode ser feita também com números inteiros. Assim, $\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0{,}4$.

Behr et al. (1983) nos lembram que:

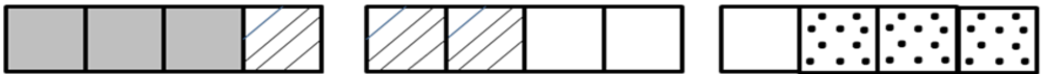
> O símbolo a / b pode também ser usado para se referir a uma operação. Isto é, a / b é por vezes utilizado como uma forma de escrever a ÷ b. Isto é, a divisão indicada pelo traço de fração e o significado do quociente é um número racional.
> Considerar números racionais como quocientes envolve, pelo menos, dois níveis de sofisticação. Por um lado, 8/4 ou 2/3, mas quando interpretados pelos resultados da divisão, estabelecem a equivalência de 8/4 e 2, ou 2/3 e 0,666... (Ibid., p. 95, tradução nossa).

Segundo Mandarino (2010, p. 114), este nível de sofisticação pode ser melhor compreendido pelos alunos apenas nos anos finais do Ensino Fundamental, porque tal compreensão exige uma reelaboração do que a eles é ensinado durante os primeiros anos de escolaridade.

Por outro lado, para o segundo ciclo de escolaridade, os PCN recomendam, a "exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão." (BRASIL, 1997, v.3, p.59)

Vasconcelos e Belfort (2006, p. 43) sugerem explorar este subconstruto por meio de situações que envolvam a repartição de mais do que um inteiro, como no enunciado a seguir:

Temos três barras de chocolate para dividir igualmente entre quatro pessoas e desejamos saber quanto cada uma receberá. Uma forma de resolver o problema é dividir cada uma das barras em 4 pedaços. Cada pedaço representa 1/4 de uma barra de chocolate. Com esta divisão passamos a ter 12 pedaços e cada um vai ganhar três pedaços, ou seja 3/4 de uma barra de chocolate. A figura que se segue mostra quanto cada um receberá.



Entretanto, Mandarino (2010) faz uma ressalva e aponta para outra possibilidade que pode dar significado a este subconstruto:

> [...] Lembremos que a transformação das frações em números exigiu um longo período de tempo, muitos séculos. Mas devemos ter cuidado em preparar o aluno, aos poucos, para que ele possa chegar a essa abstração. A marcação na reta numerada é uma boa estratégia para isso. (Ibid., p.114)

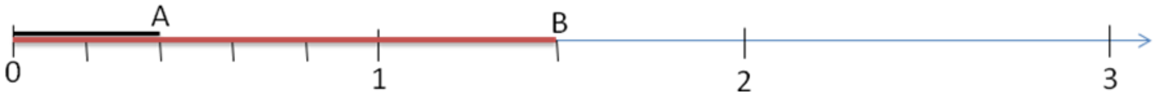
O caminho indicado por Mandarino (2010) também é considerado viável e eficaz por outros autores, como passamos a tratar a seguir.

Subconstruto ponto na reta numérica

Neste subconstruto, segundo Behr et al. (1983), os números racionais, inclusive as frações, são interpretados como pontos sobre uma reta numérica. E, estes pesquisadores afirmam que sua interpretação é bastante próxima da noção de medida (p.99). Isto é, para que se localize corretamente um ponto sobre a reta numerada é necessário que se identifique o comprimento que está associado a ele.

Para este procedimento, como se fosse numa régua, cada um dos números inteiros é representado por pontos, igualmente espaçados, na reta. Depois, frações menores que uma unidade, são determinadas por pontos no intervalo de zero a 1, dividindo-o em quantas partes iguais determinar o denominador da fração. Para as frações maiores que um inteiro, o aluno deve considerar as unidades inteiras necessárias e repartir o próximo intervalo em partes iguais como na situação anterior.

A seguir temos dois exemplos numa mesma reta numerada. O primeiro é o ponto A que localiza a fração 2/5, que é menor que uma unidade e o segundo é o ponto B correspondente à fração 3/2, que é maior que uma unidade.



Hung-Hsi Wu (1998), professor do departamento de Matemática da Universidade de Berkeley, propõe que se inicie o trabalho com o conceito de fração a partir da reta numérica. Ele acredita que quando um número é estudado em termos geométricos, sua compreensão é significativa.

Em 2002, no segundo capítulo do livro *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*, Wu retoma sua proposta de definição de fração como um ponto na reta numérica e acrescenta alguns aspectos. Ele afirma que todo número é um ponto na reta numérica e as frações são uma coleção especial de números, indicados por a/b, em que a e b são números inteiros e b ≠ 0. Para Wu, qualquer outro subconstruto só deve ser associado às frações depois deste conceito ser compreendido como número, o que para ele só ocorre por meio do trabalho na reta numárica.

Nesse trabalho, Wu (2002, p. 4) afirma que os professores estão acostumados a usar materiais didáticos e não se preocuparem com uma definição clara para frações. Apresentam frações como uma relação entre números (parte/todo, quociente e razão) o que afirma não ser satisfatório. Como justificativa, traz o seguinte exemplo: “Se eu disser que descobri uma substância que é descrita simultaneamente por dura como aço, leve como o ar, e transparente como o vidro, você terá dificuldades de imaginá-la”. (p. 5).

Wu (2002) também faz objeção à ideia de que frações devam ser explicadas em termos de uma "relação" por acreditar que a maioria das pessoas não sabe o que é uma relação, seu real significado e implicações.

Para o caso do subconstructo divisão de *a* por *b*, Wu (2002) considera que se *a* é um múltiplo de *b*, tal relação pode fazer sentido, por ser simples efetuar 8 ÷ 2 ou até mesmo 2 ÷ 4. No entanto, afirma que é difícil compreender 2 ÷ 3. Assim, para ele, a utilização da ideia de quociente não faz sentido.

Estudos realizados pelo Núcleo de Estudos e Pesquisas sobre Educação Matemática (NEPEM)[6], vinculado ao Programa de Mestrado em Educação da Universidade São Francisco, também defendem a abordagem de frações como coordenada linear, ou seja, como ponto na reta numérica. Este grupo de pesquisa analisou três coleções de livros didáticos[7] e identificou que o trabalho com a reta numérica raramente é realizado, aparecendo, eventualmente, em exercícios e ganham um pouco de formalização apenas no 8º e/ou 9º ano. Para o NEPEM (2004) o trabalho exploratório com a reta numérica deveria estar mais presente em todas as séries do ensino fundamental. Eles defendem:

[6] NEPEM: Núcleo de Estudos e Pesquisas sobre Educação Matemática, vinculado ao Programa de Mestrado em Educação da Universidade São Francisco (USF), Itatiba/SP, é composto por alunos da graduação e da pós-graduação, professores escolares e professores da USF.

[7] Para essa análise, o grupo optou por três coleções de autores que apresentam um trabalho já bem conceituado na produção de materiais para o ensino fundamental: Imenes (2001, 2002), Pires (1998, 2002) e Lopes (2000). Para as obras com mais de um autor, como há mudanças de parceria de um nível de ensino para outro, utilizaram como referência o autor comum.

> [..] que tal subconstruto é fundamental para a representação gráfica em sistemas de eixos coordenados, visto que esta representação exige, muitas vezes, a localização de pontos de coordenadas não inteiras. A ausência de um trabalho pedagógico mais sistemático pode ser indicativa das dificuldades que os alunos, em níveis de ensino mais avançados, encontram ao se depararem com as coordenadas de um ponto expressas em números racionais (fracionários ou decimais). (NEPEM, 2004, p. 56).

Com os estudos apresentados nesta seção buscamos embasamento para a abordagem de frações privilegiada pela sequencia didática que gerou os dados desta pesquisa, bem como para a análise das observações .

1.2 – Pesquisas relacionadas ao tema frações

O estudo das frações tem sido objeto de análises e reflexões acerca de sua complexidade e dos desafios que permeiam a prática pedagógica relacionada a este campo numérico.

Encontramos pesquisas relacionadas à aprendizagem de fração, que investigam o grau de aquisição deste conceito e se ele possibilita a resolução de problemas. Apresentamos a seguir algumas delas.

Merlini (2005) investigou as estratégias que os alunos de 5ª e 6ª séries utilizam diante de problemas que abordam o conceito de fração. Para isso, esta pesquisadora realizou um estudo diagnóstico com 120 alunos da rede pública estadual da cidade de São Paulo. Os dados foram coletados através de aplicação de questionários e entrevistas junto aos educandos e seus resultados permitiram constatar que não houve um desenvolvimento equitativo, entre os significados de fração escolhidos para esta pesquisa, quanto às estratégias de resolução dos problemas. Com isso, ela concluiu que a abordagem que se faz do conceito de fração não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito.

Moutinho (2005) se propôs a identificar as concepções que os alunos de 4ª e 8ª séries do ensino Fundamental apresentam frente a problemas que abordam este conceito. A metodologia constou de um estudo descritivo realizado com a elaboração de um instrumento diagnóstico que foi aplicado a 123 educandos, distribuídos em duas escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo. Este pesquisador observou que os estudantes da 4ª série usaram apenas o significado parte-todo para resolver as atividades propostas e se saíram melhor do que os da 8ª série que usaram até operações com frações e concluiu que os diversos significados do conceito de fração devem ser ampliados ao longo das séries do Ensino Fundamental.

Vasconcelos (2007) investigou a aquisição do conceito de número racional na forma fracionária. Para isso, esta pesquisadora aplicou sete problemas a 50 alunos que cursavam o Ensino Fundamental, de 4ª à 8ª séries, de uma escola privada de Porto Alegre (RS). Ela verificou que os estudantes não estabeleceram conexões entre fração e divisão e concluiu que há a necessidade de explorar os números fracionários em várias situações e em diferentes contextos, repensando o ensino de fração na escola.

Malaspina (2007) fez um estudo intervencionista para introdução do conceito de frações com alunos da 2ª série do Ensino Fundamental. Este estudo envolveu 61 alunos de duas turmas de uma escola pública estadual da região de Santo André, São Paulo. Estes alunos fizeram um pré-teste, um teste intermediário e um pós-teste para que fosse acompanhada a evolução de suas aprendizagens. Após análises, esta autora sugere que as dificuldades apresentadas pelos estudantes

> [...] poderiam ser minimizadas por um trabalho que privilegiasse o ensino de frações, a partir de diversos contextos, [...]. Destacamos, ainda, a importância do papel do professor, pois cabe a ele a cuidadosa escolha e adequação das situações que dão significado ao conceito. (Ibid., p.163).

Lessa (2011) desenvolveu uma sequência didática para ensinar número fracionário através do significado de medida, que foi aplicada em alunos de uma escola privada de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. As aplicações desta sequência didática se tornaram fonte de investigação para esta pesquisadora. Os resultados obtidos validaram o material didático e indicaram que os alunos compreenderam os números fracionários através deste significado.

Encontramos outras pesquisas que nos parecem estar imbricadas às questões de aprendizagem, porque conforme o que foi sinalizado por Malaspina (2007), como os professores são os responsáveis pela escolha e adequação da apresentação de um conceito, a aprendizagem depende das práticas pedagógicas e dos saberes docentes. Destacamos algumas a seguir.

Santos (2010) pesquisou sobre os saberes pedagógicos de professores efetivos de matemática, em uma rede pública municipal, através de entrevistas e memoriais, na perspectiva de realçar que a prática pedagógica requer o saber para ensinar e o saber ensinar:

> [...] percebemos que os professores buscam, em suas práticas pedagógicas, os conhecimentos adquiridos nos cursos de formação (inicial e continuada), como também aliam a esses conhecimentos destrezas profissionais que adquiriram nas experiências vivenciadas em sala de aula. (Ibid., p.125)

Outros autores fizeram investigações sobre a reflexão coletiva quanto à prática pedagógica, em situações planejadas para uma aula. São eles Magalhães (2008) e Felix (2010), que trabalharam com modelos adaptados da metodologia *Lesson Study* (Pesquisa de Aula). Magalhães (Ibid.) usou esta metodologia com professores e futuros professores e, apesar dos entraves relacionados a tempo e espaço para as reuniões, este trabalho favoreceu o desenvolvimento profissional de todos os envolvidos. Felix (Ibid.) fez reflexões sobre suas aulas junto aos membros do grupo de pesquisa do qual é membro, e que é coordenado pela professora Yuriko Yamamoto Baldin, da Universidade Federal de São Carlos. Para este pesquisador, a metodologia da Pesquisa de Aula permitiu que ele passasse a ter um novo olhar sobre as atividades feitas pelos alunos, valorizando-as e qualificando a aprendizagem.

Além das questões relacionadas à prática pedagógica e à didática da matemática, temos pesquisadores que investigaram as concepções de docentes sobre frações. Santos (2005) realizou sua pesquisa com professores polivalentes e especialistas, da rede estadual de São Paulo. Os docentes participantes desta investigação produziram problemas que envolviam o conceito de fração e seus diferentes significados, depois eles resolveram estes problemas. Procurando compreender as concepções de professores sobre o conceito de fração, observou que não houve diferenciação entre os professores polivalentes ou especialistas, concluindo que é provável que estas concepções carreguem forte influência daquelas construídas durante suas experiências como alunos na Educação Básica. A maioria destes docentes propôs situações que utilizavam o significado operador multiplicativo, levando este pesquisador a supor que:

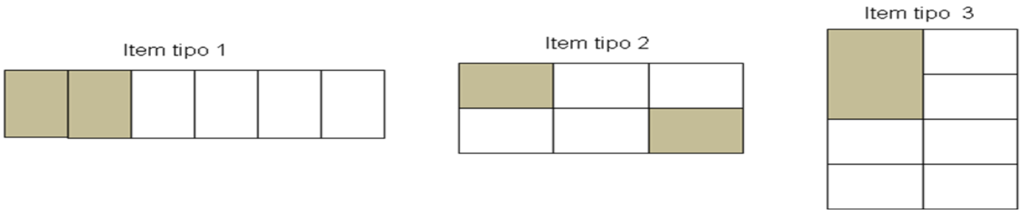
> [...] esta evidência pode estar relacionada à concepção do professor em relação à própria matemática – fazer matemática significa, essencialmente, fazer cálculos. Neste sentido, talvez, problemas envolvendo o significado

> operador multiplicativo possibilitem mais facilmente o emprego de um conjunto de técnicas operatórias e procedimentos para sua resolução. (SANTOS, 2005, p.149)

Canova (2006), na sua dissertação de mestrado, realizou entrevistas com professores de 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental de escolas municipais de Osasco e utilizou um instrumento investigativo que propunha que os professores resolvessem problemas relacionados ao conceito de frações e que sugerissem outros. Esta pesquisadora percebeu que os professores tiveram melhor desempenho quando os problemas envolviam os subconstrutos de parte-todo e operador multiplicativo, e quando estes docentes criavam um problema, eles davam preferência a esta segunda ideia. Ela concluiu que não há um desempenho equitativo entre os significados de fração, indicando através deste fato, que estes professores não compreendem o conceito de fração porque "para a compreensão do conceito de fração é necessário, não apenas, o entendimento dos diferentes significados (subconstrutos), mas sim a relação entre estes." (p.202). Canova (Ibid.) finaliza alertando para a necessidade de se majorar o campo conceitual dos professores em relação à fração.

Gomes (2010) fez sua pesquisa no Rio de Janeiro com professores da rede pública – municipal e federal e da rede particular. E apesar do contexto geográfico ser outro, ele registrou evidências similares às citadas. Nesta investigação, os docentes não conseguiram identificar os significados de fração em alguns problemas, e conclui que é possível que eles ainda não tenham consolidado, para eles mesmos, o conceito de fração.

No Brasil, a pesquisa de Campos e Cols (1995 apud Nunes e Bryant, 1997) traz dados e apresenta conclusões relevantes para nossa investigação. Com base na pesquisa de Kerslake (1986), este grupo de pesquisadores pediu a estudantes, com idade aproximada de 12 anos ou mais, que identificassem frações em diagramas que não podem ser resolvidas por contagem dupla e requerem que eles tenham como referência o subconstruto parte-todo. Este tipo de procedimento de contagem dupla é aquele em que os alunos contam o número total de partes e número de partes pintadas. Foram apresentados os seguintes diagramas:



Os resultados deste estudo mostraram que os alunos tiveram bom desempenho nos itens 1 e 2 uma vez que, nestes casos, eles usaram a contagem dupla para identificar a fração nestes diagramas. Contudo, para estes itens houve alguns registros de estudantes que erraram porque contaram as partes pintadas e expressaram esta quantidade através de um número no numerador e as partes não pintadas, foram indicadas no denominador. O item do tipo 3 foi considerado difícil porque 56% dos alunos escolheram 1/7 como fração correspondente a representação do diagrama, e apenas 12% responderam corretamente escolhendo a fração 2/8.

Outros trabalhos importantes relacionados à aprendizagem e ao ensino de frações são os de Hart et al. (1981), Behr et al. (1983), Kerslake (1986) e Ball (1993).

A pesquisa de Hart et al. (1981) que foi realizada na Inglaterra, com o objetivo de verificar o tipo de conhecimento que estudantes, com idades entre 12 e 15 anos, tinham sobre frações. Este grupo de pesquisadores testou, em entrevistas individuais com estes adolescentes, alguns problemas que envolviam os subconstrutos parte-todo, medida, taxa e quociente. Os resultados desta investigação trouxeram várias contribuições para o ensino de frações. Entre elas, temos que a ideia de que educandos podem fazer cálculos com frações mais facilmente do que resolvem problemas relacionados a este campo numérico nem sempre se confirmou, uma vez que eles recorreram a estratégias próprias e solucionaram os problemas.

Damos destaque às conclusões que Hart et al. (op. cit.) fizeram em relação às representações. Eles afirmam que o uso de diagramas ou esquemas pode ajudar na introdução do conceito de fração, mas ele não é apropriado para todo o estudo com as frações. Na introdução deste conceito, os estudantes usam a contagem para registrar através da notação, quantas partes foram pintadas do todo. Para estes pesquisadores, nomear a parte quando o todo é dividido em quantidades exatamente iguais como o denominador da fração solicita é relativamente fácil.

Hart et al. (op.cit.) também encontraram evidências de que o estudante se concentra nos dois números da razão e julga o tamanho da fração pelo tamanho comparativo dos numeradores ou denominadores. Nesta pesquisa, 20% dos entrevistados entre 12-13 anos de idade afirmou que quatro oitavos é maior que dois quartos. E, neste caso, quando feita a representação partindo de um mesmo inteiro, os alunos conseguem compreender que quatro oitavos é equivalente a dois quartos. Neste caso, as representações podem facilitar a compreensão.

O projeto de pesquisa de Behr et al. (1983), além de ser referência para professores e pesquisadores quanto ao ensino de frações, interessou-nos sobretudo pelo foco que teve quanto ao papel dos materiais manipuláveis em facilitar a aquisição e utilização do conceito de número racional, também na forma fracionária, convergindo com as aplicações propostas em nossa pesquisa . Estes pesquisadores alertaram que não desejavam eleger o material que proporcionasse a melhor ajuda para a compreensão deste conceito, e sinalizaram que diferentes materiais podem ser úteis, dependendo do que se quer desenvolver. Eles dão como exemplo as dobraduras de papel, que pode ser excelente para representar as relações entre parte-todo ou frações equivalentes, mas pode ser enganosa para representar a adição de frações. Enfatizam que assim como não há um único material para ensinar um conceito tão complexo como o das frações, tão pouco só um tipo de material é suficiente para que todas as crianças entendam o que está sendo ensinado. Um modelo concreto que é significativo para uma criança em uma situação pode não ser significativo para outra criança na mesma situação, nem para a mesma criança em uma situação diferente. Concluem afirmando que não existe um único material que seja melhor para todas as crianças e para trabalhar com todos os subconstrutos do conceito de fração. O objetivo é identificar atividades de manipulação que utilizam material concreto, cuja estrutura se ajuste estrutura do subconstruto em particular a ser ensinado.

Behr et al. (op. cit.) explicam que materiais manipuláveis oferecem um mecanismo para libertar o processo de pensamento das crianças porque, se adequadamente concebidos e seqüenciados, podem fornecer uma interação entre as condições do problemas e sua solução.

Os estudos de Kerslake (1986) envolveram dez mil estudantes ingleses entre 11 e 15 anos e investigou o grau de entendimento sobre frações. Esta pesquisadora, que havia participado como integrante do grupo de pesquisa de Hart et al (1981), constatou desta feita, que os jovens sentiam familiaridade com o subconstruto parte-todo e recorriam a ele mesmo quando esta escolha não era a mais apropriada. Com isso, ela propôs a discussão do quanto o subconstruto parte-todo pode inibir o desenvolvimento de outras interpretações de fração. Provavelmente, um ensino fixado neste subconstruto reduzirá a complexidade deste campo numérico, dificultando a compreensão do conceito de fração.

Deborah Ball trabalha com pesquisas relacionadas ao ensino de matemática e à formação de professores. No trabalho que ela realizou em 1993, ela afirma que o professor deve planejar caminhos e estratégias para que os estudantes possam aprender a construir seus próprios modelos de representações e escolher caminhos e estratégias, requer um aprendizado por parte dos docentes que não é fácil. Para Ball (1993), estas escolhas devem equilibrar respeito à integridade e ao espírito matemático com a mesma seriedade e respeito aos alunos, servindo de âncora para o desenvolvimento de suas ideias matemáticas. No caso das frações, ela recomenda que o professor pese as vantagens e desvantagens em oferecer aos alunos estruturas representativas com materiais. Sugere também que sejam oferecidas situações compatíveis com a vivência dos estudantes, para que eles criem as suas representações e possam trocar ideias com seus pares. Com isso, o professor pode, a partir destas criações, fazer perguntas que questionem o modelo criado por eles, fazendo as intervenções cabíveis. Além disso, Ball (op.cit) alerta que a escolha da representação tem que ser equilibrada, isto é, o foco de fazer matemática divertida poderá justificar algumas representações que não são fundamentadas em significados, que oferecem poucas oportunidades para explorações e conexões. Similarmente, uma orientação e compreensão da matemática com regras e algoritmos não apóiam uma busca pelo uso fundamentado em contextos de representação.

Podemos perceber, através das pesquisas apresentadas, que o tema de nossa pesquisa vem sendo amplamente discutido, denotando sua importância. Entretanto, nos parece que este tema está longe de se esgotar. Continuamos precisando de investigações que apontem caminhos que favoreçam o ensino das frações, bem como proporcionem que professores reflitam sobre sua prática para conseguir aprimorá-la e promover uma aprendizagem eficaz.

No próximo capítulo, delinearemos a metodologia de nossa pesquisa, apresentado o percurso de construção da sequência didática, do material manipulativo e o contexto em que foi realizada.

2 – Metodologia de Pesquisa

Neste capítulo, descrevemos a metodologia de desenvolvimento desta pesquisa. Na primeira seção, relatamos como o grupo de pesquisa LIMC-Mais desenvolveu o material manipulativo. Em seguida, trazemos o percurso de construção da sequência didática, nossas reflexões e o replanejamento de nossas ações. A terceira seção é dedicada à apresentação da atividade realizada nesta investigação. Na quarta seção, justificamos o contexto da pesquisa, caracterizando o local onde foram coletados os dados e os participantes. Por fim, na quinta seção delineamos os instrumentos de coleta de dados.

2.1 – O material didático

Conforme relatamos na introdução, o grupo de pesquisa LIMC-Mais abraçou o Projeto *Jogos e Fração* e, para desenvolvê-lo, começamos pela produção do material didático. Com base nos pressupostos de Guzman (1990), que afirma que uma utilização criteriosa de jogos pode trazer vantagens, destacamos o seguinte relato:

> Jogos não precisam de introduções sistemáticas e cansativas antes de chegar a algo interessante, como é frequentemente o caso com as nossas representações de matemática. Bons jogos e quebra-cabeças podem evitar o efeito de bloqueio pisicológico ... um bom jogo coloca a todos numa situação inicial de igualdade, na qual nem tudo depende da performance e conhecimentos anteriores ...jogos são melhores para estimular a engenhosidade, fantasia, experimentação e manipulação, pois são... uma atividade livre e aberta para todos. (GUZMAN, 1990, p.360)

Foram muitas as reuniões até que o grupo LIMC definisse como seria o material. Era preciso que este estivesse de acordo com os pressupostos teóricos assumido em nossos estudos sobre o conteúdo a ser trabalhado e que pudesse ser reproduzido a baixo custo.

Decidimos pela construção de um material em que o inteiro é representado por um hexágono, constituído por outras figuras planas (Anexo 1). Em reuniões subsequentes, realizamos testes para decidir quais as figuras planas que usaríamos, como e com que material faríamos a confecção deste material. Nossa preocupação foi com a interdependência entre o conceito de área e o subconstruto parte-todo de frações de figuras, portanto, as características geométricas de uma figura plana tais como ângulos e lados fizeram parte desta construção.

Para a primeira aplicação, confeccionamos artesanalmente alguns kits do material manipulativo que denominamos Jogo das Partes. Estes kits eram compostos por 118 peças, que constituíam figuras geométricas planas, de diversas cores e em diferentes quantidades (Anexo 1). Apresentamos na Figura 2.1 uma destas peças, com o formato de um triângulo eqüilátero, como exemplo:

Peça	Relação com o hexágono
	

Figura 2.1: Exemplo de uma peça do *Jogo das partes*

Tentamos construir este material com papelão, EVA, plástico e compensado, mas optamos por confeccionar as peças em papel colorido colado sobre um dos lados de uma manta imantada. A escolha deste material se baseou na leveza, custo, facilidade de construção, garantia da conservação das formas, facilidade de manipulação das peças e que não provocassem barulho. Além disso, o material imantado possibilita a apresentação das soluções encontradas pelos alunos para toda a turma, porque suas peças aderem facilmente a qualquer placa de metal, como se vê na foto da Figura 2.2.

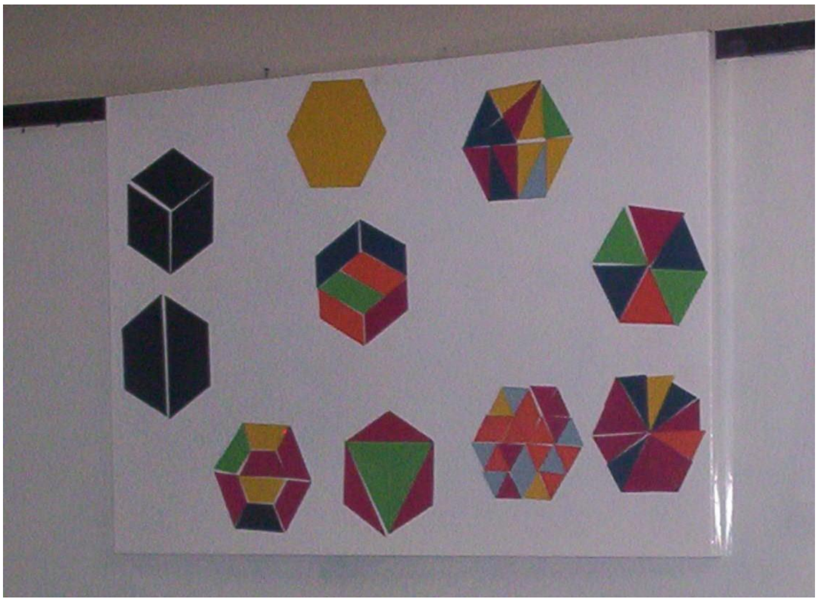


Figura 2.2 – Uso da placa de metal para socializar soluções

Outra decisão tomada pelo grupo, em discussões ocorridas durante a confecção do material, foi a de que as peças de um mesmo tipo não seriam todas construídas da mesma cor, para este não fosse um atributo de classificação das peças, tirando o foco da articulação entre as figuras geométricas planas e as frações.

2.2 – A sequência didática

Segundo Pais (2002),

> uma sequência didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico. (PAIS, 2002, p.65)

Para as aplicações piloto, elaboramos uma sequência didática composta por cinco atividades. Ela foi planejada para um dia letivo e tinha como objetivo chegar à introdução da representação fracionária. Para complementar as atividades, foram produzidas tabelas para que os alunos as preenchessem, registrando as possibilidades encontradas para cobrir o hexágono[8].

Nestas primeiras aplicações, o grupo de pesquisa LIMC-Mais tinha como meta testar a qualidade pedagógica do material produzido para a aprendizagem dos

[8] Neste texto, quando a atividade da Sequência Didática solicitar que o aluno cubra o hexágono, significa que o aluno deverá colocar as peças em cima do hexágono (peça de referência) de modo exato; isto é, sobrepondo-as sem que sobre ou falte espaço na superfície do hexágono.

alunos, na formação inicial de professores dos anos iniciais e para a formação continuada do professor aplicador. Para isso, selecionamos instituições de ensino onde faríamos a aplicação, em diferentes níveis de ensino.

As aplicações foram realizadas em cinco instituições de ensino, sendo duas turmas de formação de professores para os anos iniciais e as demais para alunos que cursavam entre o 3º ano e o 5º ano do ensino fundamental. Os aplicadores e os observadores das atividades foram os participantes do grupo de pesquisa do LIMC-Mais.

Após as aplicações iniciais, o grupo de pesquisa se reuniu para analisar as observações feitas. Nas nossas reflexões, independentemente do nível de escolaridade do público alvo, verificamos os seguintes aspectos positivos:

> - a quantidade de peças de cada kit do Jogo das Partes se mostrou suficiente para que todos os alunos de um mesmo grupo manipulassem e realizassem experiências pessoais;
>
> - o Jogo das Partes se mostrou atrativo pelo colorido das peças, pela possibilidade delas aderirem sobre a placa metálica;
>
> - a estrutura em manta magnética deu a cada peça a resistência adequada para que não houvesse deformações, ratificando a escolha feita quanto ao tipo de material para confeccionar o Jogo.

Outras questões foram destacadas e estão elencadas a seguir:

> - a dificuldade conceitual no campo da geometria de todos os alunos, em todos os níveis;
>
> - em função da dificuldade no campo da geometria, alguns professores aplicadores dedicaram muito tempo usando o material para trabalhar os conceitos geométricos, impossibilitando que a sequência de atividades fosse aplicada num mesmo dia letivo;
>
> - dada a pouca diferença entre as medidas dos lados, observamos que quase todos os alunos, mesmo depois de confirmarem por comparação com os lados de outras figuras que se tratava de um retângulo, no decorrer das atividades, se referiam com frequência a esta peça como quadrado;
>
> - a dificuldade de realizar o registro usando frações, no quadro relativo à atividade 4. Foram comuns casos de registro de frações equivalentes à unidade, ou seja 3/3, 6/6, 12/12.

Concluímos então que apesar do Jogo das Partes ter se mostrado um material apropriado para explorações didáticas, a sequência didática precisava ser modificada, sobretudo quanto aos aspectos relacionados ao campo da geometria, que tiraram o foco da articulação com as frações. A interpretação da estrutura do quadro relativo à atividade 4 também precisou ser revista, suscitando que a sequência didática contemplasse uma discussão que esclarecesse como se representa uma fração na forma escrita e através de uma notação própria.

Com base nesta análise e conclusões, ficou evidente para o grupo de pesquisa que precisaríamos de um novo planejamento para a elaboração de uma nova sequência didática.

2.3 – A atividade desta pesquisa

O grupo de pesquisa LIMC-Mais começou a construir a nova sequência didática planejando como seria a articulação entre a geometria e a fração. Resolvemos que o encaminhamento seria pertinente às figuras geométricas planas usadas nas peças do material. O professor aplicador apresentaria cada peça, identificando o polígono associado a ela. Depois deste momento de reconhecimento das peças, decidimos que um cartaz seria fixado no mural para que os alunos pudessem recorrer a ele, sempre que precisassem se referir a uma peça e não lembrassem o nome do polígono.

Num dos encontros do grupo em que elaborávamos a nova sequência didática, percebemos que nomeamos equivocadamente o material que construímos por Jogo das partes. Segundo Smole *et al.* , este material não se qualifica como jogo porque para ser, ele "*deverá ter um objetivo a ser alcançado pelos participantes, ou seja, no final, haverá um vencedor*" (2007, p.13). Com isso, atribuímos um novo nome a este material manipulativo: Frações do Hexágono.

Apresentamos a seguir a sequência didática construída pelo grupo de pesquisa do LIMC-Mais e que foi usada nesta pesquisa, na versão manual do professor.

Primeira Aula (PA)

Tempo: 40 minutos

Objetivo geral: Levar o aluno a se apropriar da estrutura do material didático.

Atividade PA.1: Exploração livre

Tempo: 15 minutos

Objetivo específico: Desenvolvimento de habilidades de visualização e classificação.

Distribua seus alunos em grupos (ou duplas) e dê a cada grupo um conjunto completo do material. Permita a manipulação livre das peças, para que eles observem as formas, tamanhos, cores, e que a quantidade de peças de cada tipo não é a mesma. Tais observações ocorrem naturalmente, não devem ser conduzidas.

Nesta etapa, é comum os alunos construírem novas formas (bichos, seres humanos, objetos) utilizando as peças do jogo. Deixe que a criatividade se expresse nesse momento de exploração.

Atividade PA.2: Reconhecimento das peças

Tempo: 25 minutos

Objetivo específico: Reconhecimento das características geométricas de classificação peças.

O reconhecimento de características das peças, já realizado espontaneamente na Atividade1, é sistematizado nesta etapa por meio da solicitação de que os alunos as classifiquem. Em alguns casos, ao final da primeira atividade, observamos que os alunos já arrumaram as peças em grupos por algum critério de classificação (cores, tamanho, forma, por exemplo). Devemos chamar a atenção para as classificações espontâneas que tenham ocorrido (em todos os grupos ou em alguns) e estimular que os próprios alunos explicitem o critério utilizado para o agrupamento.

Se a classificação por “tipo de figura” não tiver ocorrido espontaneamente, ela deve ser solicitada pelo professor, já que o objetivo desta atividade é o reconhecimento de características, semelhanças e diferenças das figuras que possibilitem estabelecer classificações por atributos geométricos.

Finalizar a atividade sistematizando as seguintes classificações:

- por número de lados: figuras de 3 (triângulos), 4 (quadriláteros) e 6 lados (hexágonos).

- subdividir a classificação por número de lados pela observação de outras caraterísticas que diferenciam os grupos: triângulos (equiláteros, retângulos, obtusângulos) e diferentes quadriláteros (retângulos, paralelogramos, trapézios, losangos).

- observar que para algumas figuras têm-se dois tamanhos e, portanto, o grupo pode ser subdividido em grande e pequeno.

- chamar a atenção para o fato de que no material há figuras iguais confeccionadas com diferentes cores.

Apresentar o cartaz com o nome das figuras e a sua cópia. Colocá-los em dois lugares visíveis da sala de aula, de modo que possam ser consultados sempre que necessário.

Segunda Aula (SA)

Tempo: 80 minutos.

Objetivo geral: Levar o aluno a reconhecer o conceito de fração com o significado de parte-todo, terminologia de algumas frações unitárias e sua representação matemática.

Atividade SA.1: Cobrir o hexágono usando outras peças

Tempo: 20 minutos

Objetivo específico: Determinar quantas peças de um mesmo tipo são necessárias para cobrir o hexágono.

Sugerir aos alunos que cubram o hexágono usando outras peças. Explicar que isso deve ser feito sem deixar sobras e sem que as peças usadas ultrapassem o espaço delimitado pelo hexágono.

Pode ocorrer de forma espontânea uma cobertura do hexágono usando apenas um tipo de peça. Caso não ocorra uma cobertura desse tipo, o professor deve levantar a questão: - Será que é possível cobrir o hexágono usando apenas peças iguais? Socialize os exemplos apresentados pelos alunos.

Depois de cada solução apresentada por um ou mais grupos, os demais devem ser orientados a realizar a mesma experiência. Em seguida, o professor deve perguntar aos alunos a quantidade necessária de peças de cada tipo para cobrir o hexágono, levando o aluno a recorrer aos nomes corretos das figuras. Assim, perguntar, por exemplo:

(a) Quantos triângulos equiláteros grandes cabem exatamente no hexágono?

(b) Quantos triângulos equiláteros pequenos cabem exatamente no hexágono?

Com os resultados encontrados podemos preencher a Tabela1 (Anexo 2), onde será registrada a quantidade de peças necessárias para cobrir o hexágono usando um único tipo de peça.

Finalizar a atividade distribuindo a Tabela1 para que cada aluno a preencha, com o apoio do professor que conduz o preenchimento em uma tabela maior reproduzida no quadro.

Na Tabela1 há também uma coluna onde o aluno deverá fazer a representação por meio de desenho da divisão do hexágono usando cada uma das peças. Para esta tarefa deve-se deixar que o aluno use sua criatividade para tal representação, ou seja, ela não deve ser conduzida pelo professor no quadro. Os alunos que necessitarem, poderão usar o material concreto disponível na mesa do grupo.

Observações:

1- Apesar das diferentes construções obtidas serem visualizadas por todos os alunos, isso não garante que cada aluno seja capaz de reproduzir o que o colega realizou. Por isso, todos os grupos devem ser incentivados a realizar diferentes construções.

2 - É importante que o aluno tenha tempo de explorar concretamente as diferentes construções antes de fazer os registros na tabela.

Atividade SA.2 – Introdução da ideia e do registro de fração

Tempo: 45 min

Objetivos específicos: Conceituar o significado de parte-todo, associar a divisão com a ideia de fração, recorrer à terminologia metade, terça parte, quarta parte, etc. para registro em língua materna de frações unitárias, conhecer a representação matemática para fração.

A partir da observação dos resultados anotados na Tabela1, podemos perguntar:

– Alguém sabe que parte a peça X é do hexágono?

Note que esta pergunta envolve a mesma relação entre as peças, mas tem outro sentido. Espera-se que os alunos compreendam que: se cabem 2 trapézios no hexágono, então um trapézio é a metade do hexágono; se cabem 3 losangos no hexágono, então um losango é a terça parte do hexágono; e assim por diante.

Distribua a Tabela2 (Anexo 3) para os alunos acompanharem a discussão, ainda sem preenchê-la.

Para o trabalho com esta nova forma de relacionar as peças, recomenda-se que o aluno consulte a Tabela1, construída na atividade anterior, e que, sempre que necessário, volte a realizar a sobreposição das peças. No 4º ano, muitas vezes, esta relação e terminologias (metade, terça parte, quarta parte,...) já foram exploradas no trabalho com a divisão entre números naturais. Aqui, espera-se que o aluno compreenda que podemos usar os mesmos termos, já que se trata de divisões em partes iguais.

A partir desta discussão os alunos, com a orientação do professor, deverão preencher a primeira coluna da Tabela2, registrando a nomenclatura por extenso, ou seja, metade para o trapézio grande; um terço para o losango; um sexto para o triângulo equilátero grande; etc. Pode ser que os alunos preencham esta parte da tabela com termos como: metade, terça parte, sexta parte, por exemplo. Neste caso o professor deve valorizar esta forma de registro, comparando-a com outras, e estabelecendo, ao final, a forma com a qual passarão a fazer os registros de partes de um todo.

Como nosso objetivo é chegar à notação de fração, sugerimos perguntar:

– *Vocês conhecem um "jeito matemático" de escrever metade, terça parte,...?*

Caso surjam diferentes sugestões de representação matemática, podemos analisar junto com o grupo de alunos a clareza de cada sugestão para o significado que se quer dar aos números envolvidos. A partir das sugestões apresentadas, o professor pode apresentar a representação matemática de fração, informando aos alunos que esta é a notação já convencionada para representar relações de uma parte com o inteiro.

A partir de então, cabe destacar a estrutura da representação fracionária e preencher outra vez a última coluna da Tabela2, usando a notação de fração.

No final desta sequência didática encontram-se as Tabelas 1 e 2 com todas as peças para que os alunos preencham. É útil que o professor reproduza estas tabelas no quadro ou em folha de papel pardo, para que o registro possa ser feito por cada um com apoio da condução coletiva.

Observações:

1 – A esta tabela pode ser acrescida uma coluna para o registro da fração por extenso, ou seja, usando a língua materna.

2 – o retângulo, que é uma das peças do material não está presente nas tabelas 1 e 2 devido à dificuldade envolvida para reconhecimento de que fração ele é do hexágono. Este pode ser um bom desafio para uma próxima aula.

Atividade SA.3 – Figuras diferentes, frações iguais

Tempo: 15 min

Objetivos específicos: Compreender que a fração independe da forma, mas sim da área do inteiro.

Talvez os alunos já tenham percebido isso, mas é importante observar que peças diferentes podem representar a mesma fração do hexágono. Nesta atividade final da segunda aula, deseja-se que cada aluno reflita independentemente sobre esta questão.

Cada aluno deverá responder por escrito às seguintes questões:

– *Por que figuras diferentes podem representar a mesma fração no hexágono?*

– *Por que isso acontece?*

Depois que responderem individualmente, incentive o debate.

O objetivo é que concluam, mais formalmente, que duas figuras diferentes representam frações iguais se tiverem áreas iguais.

Para verificação desta solução os alunos podem usar peças menores, como os triângulos equiláteros pequenos, para cobrir as figuras que representam a mesma fração do hexágono e verificar que a mesma quantidade de triângulos é necessária para cobri-las.

2.4 – Contexto da pesquisa

Para realizar a pesquisa de campo, optamos pelo Colégio Pedro II –Unidade Tijuca uma vez que existe uma parceria entre esta instituição e o LIMC-Mais para o desenvolvimento do Projeto *Jogos e Frações.*

Destacamos ainda que o Colégio Pedro II apresenta características significativamente diferenciadas. Entre elas, podemos citar a localização de uma unidade que abrange uma clientela de diferentes bairros da cidade e diferentes classes sociais. Este fato ocorre devido à escola ser pública e ser reconhecida socialmente como sendo de qualidade. Para garantir o direito de acesso a todos, é feito um sorteio no primeiro ano de escolaridade para preencher as vagas disponíveis, garantindo que os alunos apresentem uma diversidade de experiências de aprendizagem. Os estudantes matriculados têm idade compatível com o ano de escolaridade e, no caso do 4º Ano do Ensino Fundamental, esta idade é de 10 anos em média.

Uma professora do Colégio Pedro II – Unidade Tijuca, que também é participante ativa do grupo de pesquisa LIMC-Mais, se colocou como voluntária para as aplicações da sequência didática que produzimos. Ela convidou a professora com quem divide as turmas do 4º Ano de escolaridade, numa mesma unidade desta instituição, para fazer parte desta pesquisa. A docente aceitou o convite, prontificando-se em conhecer nossa proposta de investigação. As duas docentes ministram aulas de matemática e ciências, sendo que uma delas leciona para duas turmas no turno da manhã e a outra para duas turmas do turno da tarde. Ambas têm como formação o curso normal e a licenciatura plena em matemática.

As duas turmas do turno da manhã (401 e 403) são compostas por 27 alunos[9] e as do turno da tarde (402 e 404) têm 23 e 22 alunos, respectivamente. Entretanto, por motivos diversos, quatro estudantes da turma 401 e um da turma 403 faltaram às aulas nos dias de aplicação da sequência didática, portanto não participaram desta pesquisa.

Esta unidade do Colégio Pedro II tem na sua grade de horários semanal dois tempos de aula de 45 minutos para reuniões de equipe. Foi neste momento que apresentamos a sequência didática e o material manipulativo *Frações do Hexágono* para a professora que não é participante do grupo de pesquisa. Desta reunião participaram a pesquisadora e a outra docente que também é membro do grupo de pesquisa. Acordamos que o material didático, quadro imantado e os kits, ficariam sempre no armário da sala de aula, possibilitando o acesso das duas professoras a ele, uma vez que este espaço é o mesmo nos dois turnos de aula. Cada uma das professoras recebeu a sequência didática que aplicaria. Outros materiais impressos foram disponibilizados: as tabelas ampliadas e cópias das tabelas para serem preenchidas pelos alunos.

2.5 – Instrumentos de coleta de dados

Nas aplicações da Sequência Didática, foram colhidos dados através de observações diretas, fotos, filmagens e o material impresso preenchido pelos alunos.

[9] Neste texto optamos por denominar os discentes participantes por estudantes ou alunos, independentemente do sexo.

Através destes dados coletados e dos registros das observações, destacamos alguns pontos a seguir e que serão melhor descritos no próximo capítulo, na seção 3.2, destinada ao relato das aplicações da sequência didática.

A sala de aula tinha uma ambiência favorável para os estudos: os murais tinham cartazes relacionados à matemática e ciências, havia ar condicionado funcionando, boa iluminação e acústica, o mobiliário estava em boas condições de uso. Ela é exclusiva para as aulas de matemática e ciências. Portanto, os alunos é que se deslocam para se dirigir ao local da aula. Este local;

A condução da aplicação da sequência didática por parte de cada professora acarretou em diferentes observações em relação à apresentação e aceitação do material manipulativo e quanto à participação dos alunos em relação às soluções encontradas e em relação ao estudo das frações.

Verificamos que houve adaptações da sequência didática em relação ao manual fornecido para as professora como referência para aplicação. Entre estas adaptações temos o preenchimento das tabelas por parte dos alunos e a socialização delas.

Consideramos também a apresentação da pergunta reflexiva constante da sequência didática e os alunos encararam o desafio mediante a condução de cada professora.

O tempo de aplicação das atividades da sequência didática foi outra questão de relevância para nosso estudo.

Durante a observação, a pesquisadora circulou pelos grupos para registrar, através de fotos, filmagem e escritos, como a aplicação da sequência didática estava sendo compreendida pelos alunos através das soluções que apresentavam, pelas conversas com seus pares, pelo preenchimento das tabelas e elaboração de respostas. O material impresso preenchido pelos estudantes foi recolhido ao término das aplicações e armazenado para a análise que abordaremos no próximo capítulo.

3 – O que revelam as respostas dos estudantes

Neste capítulo, buscamos responder a pergunta que moveu esta investigação. De acordo com a metodologia de análise de conteúdo, ancorada na obra de Bardin (1977), os dados foram tratados em três etapas. Na primeira, que a autora denomina como pré-análise, realizamos a leitura livre dos documentos para formulação de hipóteses a respeito das possibilidades de classificação e seleção do material relevante para ser analisado. Numa segunda etapa, tratamos o material coletado e selecionado, categorizando e aprofundando a análise. No processo de categorização, os critérios que surgiram das primeiras leituras foram cotejados com o referencial teórico. Na terceira etapa, a partir dos resultados do tratamento analítico, realizamos algumas inferências que possibilitaram interpretar os resultados, levando-se em conta, também, os diversos fatores que influenciam a prática docente.

3.1 – A organização dos dados

Como já comentado no capítulo em que descrevemos a metodologia, coletamos diversos materiais durante o acompanhamento da aplicação da sequência didática pelas duas professoras envolvidas no projeto. Assim, ao final da coleta, passamos à necessária organização daqueles materiais.

- As anotações por mim realizadas durante as aulas foram sistematizadas em relatórios.

- As gravações de trechos das aulas em vídeo foram revistas e os pontos relevantes para esta pesquisa foram transcritos.

- As fotos foram classificadas de acordo com as etapas das aulas, os objetivos em questão, além da qualidade das mesmas.

- O material impresso e preenchido pelos estudantes, bem como as respostas apresentadas para a pergunta final da sequência didática, foram lidos para uma primeira busca de semelhanças e diferenças que pudessem ajudar na construção de categorias para classificação e interpretação (pré análise).

Esta organização resultou em oito relatórios, dois para cada uma das quatro turmas em que as aplicações foram feitas; quatro transcrições das gravações dos vídeos; cento e cinquenta fotos e noventa e quatro produções escritas dos estudantes. A tabela 3.1 mostra o quantitativo das produções dos alunos por turma.

Tabela 3.1 – Quantidade de produções escritas por turma

TURMA	401	402	403	404	TOTAL
QUANTIDADE DE PRODUÇÕES	23	23	26	22	94

No decorrer deste capítulo usamos, algumas vezes, falas dos estudantes, das professoras e para diferenciá-las, recorremos à codificação a seguir:

ESn – Estudante participante desta pesquisa mais um número atribuído a este estudante de modo aleatório, de 1 a 94.

PRn – Professora participante desta pesquisa mais um número atribuído a esta professora, de modo aleatório.

3.2 – Relato das aplicações da sequência didática

Nesta seção, relatamos como ocorreu a aplicação da sequência didática, em especial o momento da pergunta que gerou a produção escrita dos estudantes, foco dessa pesquisa. Temos como objetivo registrar possíveis interferências na referida produção.

3.2.1 – Primeira aula da sequência didática

Turmas 402 e 404

Começamos observando a aplicação da sequência didática realizada pela Professora1, nas turmas 402 e 404. Para realizar as atividades, os alunos foram organizados em grupos de quatro ou cinco componentes. Na primeira atividade, a professora deixou que os estudantes explorassem o material livremente, realizando montagens criativas (Figura 3.1) e superposições espontâneas das peças foram feitas (Figura 3.2).

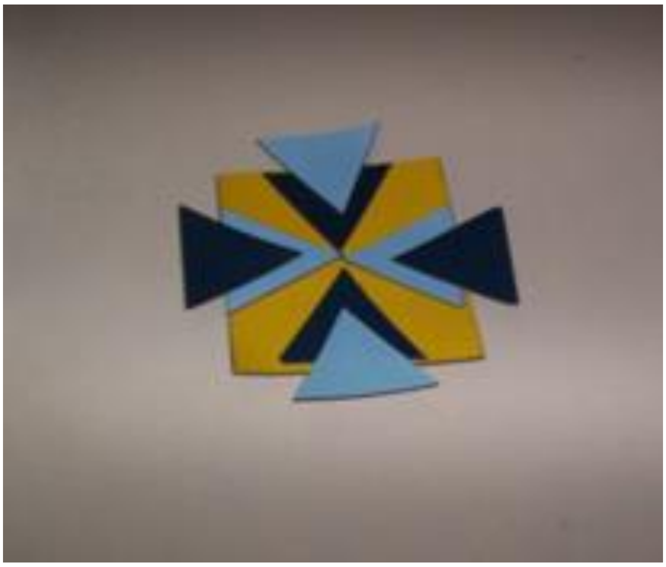


Figura 3.1 – Criação livre utilizando as peças do material manipulativo

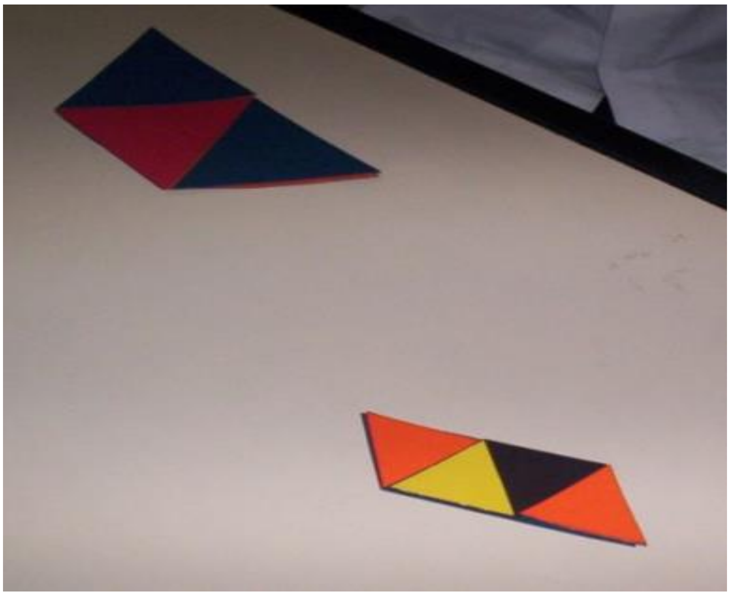


Figura 3.2 – Coberturas espontâneas entre peças do material manipulativo

Depois, a professora conduziu a turma para a primeira atividade dirigida da sequencia: cobertura do hexágono, sem superposição das demais peças ou deixando alguma parte do hexágono sem cobertura (Figuras 3.3 e 3.4). A docente, conforme orientações do manual do professor para a aplicação na sequência didática, havia apresentado as figuras geométricas associadas às peças do material previamente, o que facilitou todo o trabalho subsequente.

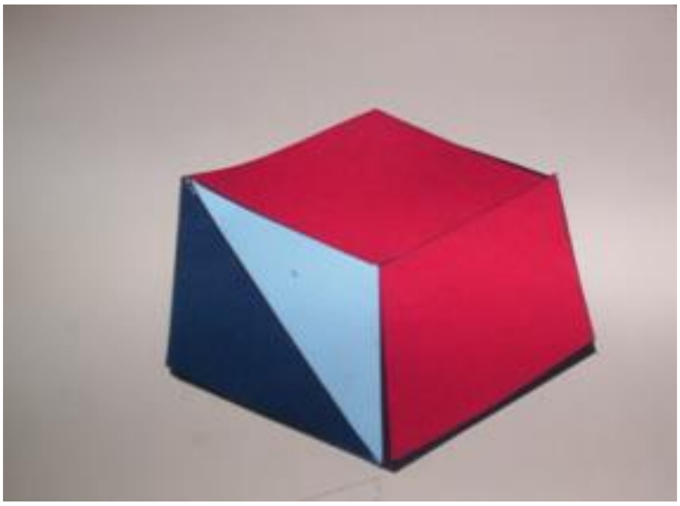


Figura 3.3 – Cobertura do hexágono utilizando as peças diferentes do material manipulativo

Figura 3.4 – Cobertura do hexágono utilizando as peças iguais do material manipulativo

Para finalizar a primeira aula, em cada uma de suas turmas, a professora sistematizou o reconhecimento de características, semelhanças e diferenças entre as figuras, o que possibilitou o estabelecimento de classificações de cada peça por atributos geométricos. Para isso, a professora pegava peças do kit e, por meio de perguntas sobre seus atributos, relembrava o nome do polígono associado, pois, como mencionamos, já havia apresentado aqueles polígonos em aula anterior. Por fim, a docente apresentou dois cartazes, confeccionados pelo grupo de pesquisa, com os nomes das figuras e fixou-os no mural da sala de aula.

Turmas 401 e 403

A Professora2, regente das turmas 401 e 403, realizou as atividades da primeira aula sem nossa observação, pois entendeu que nos interessava apenas a segunda aula, aquela na qual se aplicaria a atividade objeto desta pesquisa. Por isso, não temos registro da aplicação da primeira aula da sequência didática. Segundo depoimento da professora, ela realizou o que estava previsto no manual e considerou que não houve nada de relevante a nos relatar.

3.2.2 – Segunda aula da sequência didática

Turmas 402 e 404

Na segunda aula da sequência didática, a Professora1 manteve os grupos formados na aula anterior. A docente iniciou a aula com um diálogo sobre números, não previsto no manual, transcrito a seguir:

PR1: "Com qual número vocês estão trabalhando?"

Vários alunos responderam ao mesmo tempo: "Naturais!"

PR1: "Hoje vamos aprender um pouco sobre outro tipo de número que não é natural. Alguém sabe que número é esse?"

ES27: "Fração."

A professora confirmou a resposta de ES27 e solicitou que os alunos procurassem no dicionário o significado da palavra fração. Assim que acharam o vocábulo, leram os significados em voz alta e a professora destacou um deles como sendo o matemático: *parte de um todo*. Afirmou que "o todo é o inteiro que ainda não foi repartido", que no material que estavam usando o todo era o hexágono, e mostrou a peça.

Ao terminar esta parte introdutória, que cabe destacar mais uma vez que não estava prevista nas orientações da sequência didática, a Professora1 distribuiu os kits e orientou a primeira atividade da segunda aula da sequencia didática: cobrir o hexágono usando apenas peças iguais.

Como prevíamos, na aula anterior alguns exemplos de coberturas do hexágono com peças iguais já haviam sido realizados. Apesar disso, alguns alunos voltaram a cobrir o hexágono com peças variadas. Nestes casos, a professora reforçou o que estava sendo pedido e, circulando pelos grupos, apontava as peças que não eram iguais entre si. A partir deste tipo de intervenção, os estudantes realizaram coberturas com um só tipo de peça. Depois disso, um componente de cada grupo expunha no quadro imantado uma das soluções encontradas para a cobertura do hexágono usando apenas peças iguais entre si. A figura 3.5 mostra alguns estudantes colocando no quadro imantado a sua solução.

Figura 3.5 – Soluções socializadas para a cobertura do hexágono com peças iguais

Para cada solução, a Professora1, ressaltava o tipo de figura utilizada para cobrir o hexágono, e chamava a atenção para o fato de que o inteiro estava dividido em partes iguais. A seguir, a professora distribuiu a ficha de atividade (Tabela1 – Anexo2), conforme previsto no manual do professor, colocou uma ampliação desta ficha no mural, para socialização das soluções.

Para o preenchimento da tabela, a professora incentivou que os alunos contassem as peças iguais que cobriram o hexágono, usando as soluções expostas no quadro imantado. A partir da observação, os alunos foram preenchendo a Tabela1 (Figura 3.6).

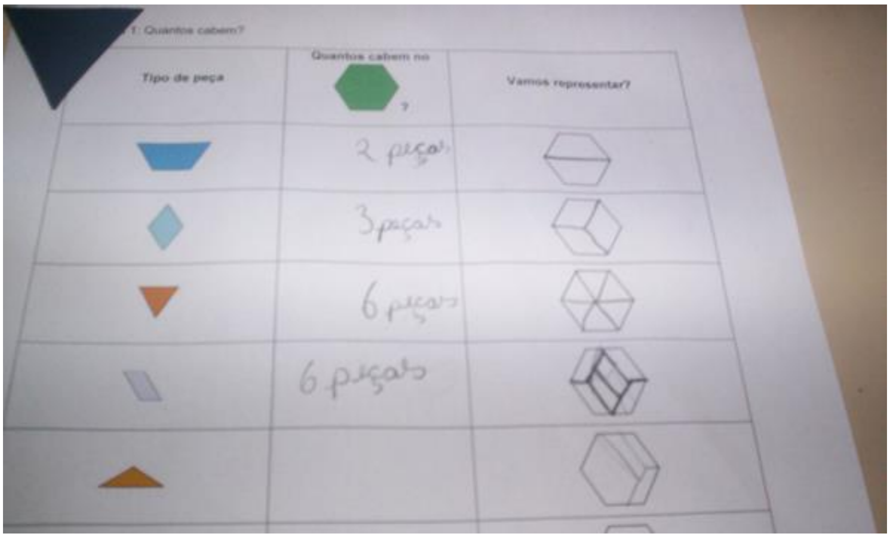


Figura 3.6 – Tabela1 sendo preenchida pelo estudante ES41

Finalizada esta atividade, a Professora1 voltou a relacionar cada parte com o inteiro, voltando a chamar a atenção para as soluções expostas no quadro imantado e propôs a segunda atividade desta aula. Ela falou sobre a divisão do inteiro e perguntou para os alunos:

PR1: “ Como se chama cada parte quando um inteiro é dividido em duas partes iguais?”

ES33: “Metade!”

ES37: “Meio.”

A Professora1 confirmou que as duas respostas estavam corretas e continuou nomeando as frações, associando a quantidade de peças utilizadas com a nomenclatura que ia introduzindo. A seguir, ela apresentou a notação de fração.

A Tabela2 (Anexo 3) foi distribuída e alguns alunos começaram a preenchê-la. Alguns estudantes esperaram apenas que a professora revelasse como algumas denominações das frações são escritas por extenso (Figura 3.7). Nas duas turmas da Professora1, o comportamento dos alunos diante da atividade de preenchimento da tabela 2 foi semelhante. Provavelmente, em função da professora ter antecipado, oralmente, a associação das peças do material manipulativo as nomenclaturas e notações das frações, os alunos realizaram o preenchimento com bastante autonomia.

Figura 3.7 – Tabela2 sendo preenchida pelo estudante ES35

Como sugerido no manual do professor, a professora colocou no mural uma cópia ampliada da tabela para discussão coletiva das soluções. Quando todos terminaram esta atividade, ela pediu que os alunos observassem o trabalho realizado e comentassem o que mais chamava a atenção. Um dos estudantes da turma 402 declarou:

ES31: ”Tem três peças diferentes representadas pela mesma fração.”

A Professora1 mostrou a observação do estudante ES31 na Tabela2, fixada no mural, para que todos os alunos pudessem visualizar o que havia sido dito. Neste momento, ela lançou oralmente a pergunta que finaliza as atividades desta segunda e última aula da sequência didática: *por que figuras diferentes podem representar a mesma fração do hexágono?.* Depois, escreveu a questão no quadro e solicitou que os alunos a copiassem e respondessem por escrito no verso da folha da Tabela2. Além disso, a docente sugeriu que os alunos usassem o material manipulativo para “verificar porque uma mesma fração pode estar associada a figuras diferentes”, enfatizando, assim, o que deveria ser investigado.

Na turma 404, da mesma professora, vários alunos, ao mesmo tempo, detectaram que haviam três peças diferentes representadas pela mesma fração e. a partir desta constatação, ela procedeu do mesmo modo.

Verificamos o empenho dos alunos em buscar uma resposta. Alguns deles refizeram as coberturas do hexágono, outros experimentaram colocar peças umas sobre outras, comparando suas áreas e outros realizavam comparações das medidas dos lados das peças em questão. Por estarem agrupados, os estudantes trocaram ideias, inclusive sobre como escrever uma resposta.

Quando o tempo da aula se encerrou, em cada uma das turmas, 402 e 404, todos os alunos já haviam redigido alguma resposta para a questão e recolhemos todo o material impresso, armazenando-o para as análises.

Esta docente seguiu o que foi planejado para as atividades da sequência didática, procedendo de modo similar nas duas turmas. Apesar de ter acrescentado uma atividade, a da procura do significado da palavra fração no dicionário, ela procurou seguir as recomendações em relação à sequência das atividades e ao tempo previsto para cada uma, bem como a indicação de que os alunos trabalhassem em grupos com quatro ou cinco componentes.

Turmas 401 e 403

As observações da aplicação da sequência didática realizada pela Professora2, nas turmas 401 e 403, começaram na primeira atividade prevista para a segunda aula. Para realizar as atividades, os alunos foram colocados em grupos, uns com cinco componentes, outros com seis. Esta docente entregou os kits com o material manipulativo, um para cada grupo, e pediu que os alunos cobrissem o hexágono com as outras peças de modo que toda a superfície do hexágono ficasse coberta e que nenhuma peça superposta ultrapassasse o hexágono. Os estudantes realizaram a atividade proposta e obtiveram vários tipos de cobertura. As soluções encontradas não foram socializadas para a turma, apenas entre os componentes do grupo onde elas eram encontradas.

Depois, a docente solicitou que as coberturas do hexágono fossem feitas usando somente peças iguais e, enquanto esta tarefa era executada, ela distribuiu a Tabela1.

Uma vez que a Tabela1 foi distribuída, concomitantemente com o comando de formar uma cobertura do hexágono com peças iguais, alguns alunos começaram a preenchê-la. De modo autônomo e individual, apesar de agrupados, eles reconheciam a peça indicada na tabela, realizavam a experiência de cobrir o hexágono apenas com peças daquele tipo, contavam quantas tinham sido usadas e registravam esta quantidade na tabela.

A Professora2, depois de distribuir as folhas para os alunos, fixou uma cópia ampliada da mesma no mural. A seguir, ela caminhou pela sala acompanhando a realização da tarefa pelos alunos. Quando percebia que um aluno tinha feito uma das coberturas a serem realizadas com um mesmo tipo de peça, ela pedia que este componente colocasse sua solução no quadro imantado. Conforme os alunos acabavam de expor suas soluções, a própria docente verificava a quantidade de peças usadas e completava a tabela ampliada, linha por linha, conduzindo o preenchimento da tabela por todos os alunos, ou a correção para aqueles que já haviam respondido.

Assim que a professora terminou o preenchimento da Tabela1, chamou a atenção dos alunos para o fato do trapézio ser a metade do hexágono. Atentos ao que estava sendo dito pela docente, alguns alunos da turma 403 se colocaram:

ES52: “O losango é um terço!”

ES65: “Então estamos estudando frações!”

Neste momento, a docente confirmou o que eles estavam estudando e definiu fração como “divisão em partes iguais”. Na turma 401, ela mesma anunciou que as atividades que estavam fazendo estavam relacionadas a frações.

A seguir, como a Tabela1 havia sido preenchida, ela aproveitou para alertar que peças diferentes estão representadas pela mesma fração, mostrando na tabela afixada no mural, os registros feitos.

Conforme os estudantes terminavam o preenchimento da Tabela1, entregavam para a professora e passavam a organizar e guardar o material manipulativo ou o seu próprio material na mochila. Depois, a docente nos entregou todas as tabelas para serem armazenadas.

O desenvolvimento desta primeira atividade da segunda aula levou 70 minutos, mas no planejamento da sequência didática, a previsão de tempo de realização desta atividade era de 20 minutos. Com isso, a Professora2 usou quase todo o tempo previsto para a segunda aula para realizar apenas a primeira das atividades. Ao término desta aplicação, ela solicitou que a continuação da sequência didática acontecesse uma semana depois, devido à necessidade de cumprir o planejamento da escola com outras atividades.

No dia combinado, voltamos à unidade escolar para acompanhar a continuidade da segunda aula da sequência didática, atividades 2 e 3, nas turmas 401 e 403. Os alunos voltaram a formar grupos e a docente começou a aula, corrigindo a tarefa de casa que foi pesquisar o significado da palavra avos. O aluno ES75 leu seu registro:

ES75: “Avos: fração da unidade quando dividida em mais de dez partes iguais.”

A professora escreveu no quadro o significado de avos, lido por ES75. Depois, ela colocou no quadro imantado as possibilidades de coberturas do hexágono com peças iguais. Enquanto isso, alguns alunos ajudaram a distribuir a Tabela2 e a cópia ampliada foi colocada no quadro. Ela anunciou que na primeira coluna desta tabela era para escrever a fração por extenso e, na segunda, para colocar a notação de fração. A seguir, ela mostrou um exemplo de fração e informou que “o número de cima do traço de fração recebe o nome de numerador, e o de baixo, denominador”. Cabe observar que tal estratégia de condução da aula não havia sido recomendada no manual de aplicação e evidenciam a força da concepção oriunda de suas experiências prévias. Cabe assinalar que, pelo dever de casa corrigido no início da aula, os termos utilizados para nomear frações deve ter sido trabalhado nas aulas não observadas. De outra forma, qual seria o objetivo de procurar a palavra “avos” no dicionário?

Na sequência, a docente conversou com os alunos sobre exemplos da vida cotidiana em que as frações são encontradas: receitas, escalas, pesagens como meio quilo. Depois, usando as peças do material manipulativo, mostrou a fração 2/3, escrevendo no quadro que 1/3 + 1/3 =2/3 e, a seguir, chamou atenção de que 3/3 = 1.

Apenas depois de tais sistematizações, a atividade de preenchimento da Tabela2 foi retomada e finalizada. E, enquanto os alunos terminavam o preenchimento, a docente, às vezes, os interrompia para dar outras informações, fazendo registros no quadro tais como: 3/6 = ½; 4/8 = ½.

Pareceu-nos que a professora tinha como objetivo conduzir seus alunos a observarem diferentes relações entre as peças do material. Na verdade, uma antecipação da conclusão a que se deseja que os alunos cheguem. O manual do professor para a aplicação da sequencia didática recomenda que se incentive a verificação de que coberturas diferentes podem representar uma mesma fração do hexágono. Como exemplo da verificação sugerida, o manual mostra que a cobertura exata de um trapézio grande pode ser feita com três triângulos equiláteros grandes e que, portanto, o trapézio, que é a metade do hexágono, equivale a 3/6 deste inteiro usando-se os referidos triângulos.

Terminado o preenchimento da Tabela2, a professora mostrou na tabela afixada no quadro, que existiam três peças associadas a uma mesma fração. Então, lançou a pergunta, escrevendo no quadro: *por que figura diferentes podem representar a mesma fração do hexágono?.* Pediu que os alunos copiassem a pergunta no verso da folha e respondessem, sem acrescentar sugestões ou orientações.

Enquanto os alunos copiavam e tentavam dar uma resposta, a professora ocupou-se de outras atividades pedagógicas. Circulamos pela sala para observar mais de perto de que forma os estudantes estavam elaborando suas respostas. Observamos que muitos estavam escrevendo como resposta que dois é a metade de quatro, o que não parecia estar vinculado ao fato de três peças diferentes (o triângulo equilátero grande, o paralelogramo e o triângulo obtusângulo) dividirem o hexágono em seis partes iguais e, portanto, estarem associados à fração 1/6 do hexágono. Avaliando que os estudantes não tinham entendido a pergunta, comunicamos o fato à professora. Ela parou suas atividades, foi ao quadro e, apontando na tabela as figuras que estavam associadas à fração 1/6, falou:

PR2: “Vocês precisam repensar. Elas ocupam o mesmo espaço.”

Com isso, alguns alunos escreveram exatamente o que a professora disse como sua resposta à pergunta. Os que rapidamente registraram a resposta – “elas ocupam o mesmo espaço” – esses alunos entregaram a ficha de atividade (Tabela2) para a docente. Outros estudantes continuaram a elaborar sua própria resposta.

Nas duas turmas, a segunda aula da Professora2 foram semelhantes, inclusive nos acréscimos realizados pela professora. A única diferença se deu no momento da pergunta que finaliza as atividades. Na turma 403, ocorreu como relatamos no parágrafo anterior. Na 401, assim que ela colocou a pergunta por escrito no quadro, orientou que os alunos deveriam observar as figuras da tabela que estavam associadas a uma mesma fração. E neste caso, observamos que alguns alunos recorreram ao material manipulativo para tentar elaborar suas conclusões e responder a pergunta.

O tempo de realização das atividades desta segunda aula da sequência didática foi de 100 minutos, mas a previsão era de 60 minutos.

Na próxima seção, analisaremos as respostas dos estudantes minuciosamente.

3.3 – As categorias de análise

Depois de explorar todos os materiais, começamos a organizá-los para compor o "*corpus* da pesquisa". Segundo Bardin (1977) "o *corpus* é o conjunto de documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos" (p.90). Com base em tal orientação, retiramos do grupo de respostas a serem analisadas, aquelas que não se adequavam à regra de pertinência[10]. As respostas retiradas foram aquelas que reproduziram a resposta anunciada pela Professora2, conforme relatado anteriormente, apresentadas por dez alunos da Turma 403.

Durante a leitura atenta de todas as respostas dos demais alunos à pergunta: "*Por que figuras diferentes podem representar a mesma fração do hexágono?",* fomos levadas, primeiramente, à reflexão quanto à necessidade dos alunos apresentarem um registro escrito de suas respostas. Parece-nos que esta foi uma das dificuldades relevantes para os alunos. Os estudantes envolvidos nesta pesquisa tinham idade em torno dos dez anos e pouca experiência em ter que registrar por escrito observações matemáticas.

É preciso também levar em conta que escrever uma resposta para a pergunta que fizemos suscita um texto argumentativo, uma construção que exige abstração. Para argumentar por escrito não basta fazer experiências manipulativas, é preciso selecionar as informações relevantes e relacioná-las, usando vocabulário adequado. De acordo com Bloom (1956), esta habilidade caracteriza o nível de análise e, portanto, pressupõe que níveis anteriores já tenham sido adquiridos.

Em conversa posterior com uma das professoras, confirmamos que eles voltaram ao tema na aula seguinte e que os alunos apresentaram oralmente,

---

[10] Regra de pertinência: os documentos retidos devem ser adequados, enquanto fonte de informação, de modo a corresponderem ao objetivo que suscita a análise. (BARDIN, 1977, p.92).

recorrendo ao material didático, o motivo de três peças com formatos diferentes representarem 1/6 do hexágono. Segundo a professora, ainda assim, houve dificuldade no uso de termos adequados para se referirem à igualdade entre as áreas. Como primeiro resultado, observamos que a dificuldade de expressar por palavras a explicação solicitada foi superada por dezoito alunos da Professora2, que recorreram a desenhos para compor sua resposta, como exemplificado pela resposta do aluno ES93 (apresentado na Figura 3.8).

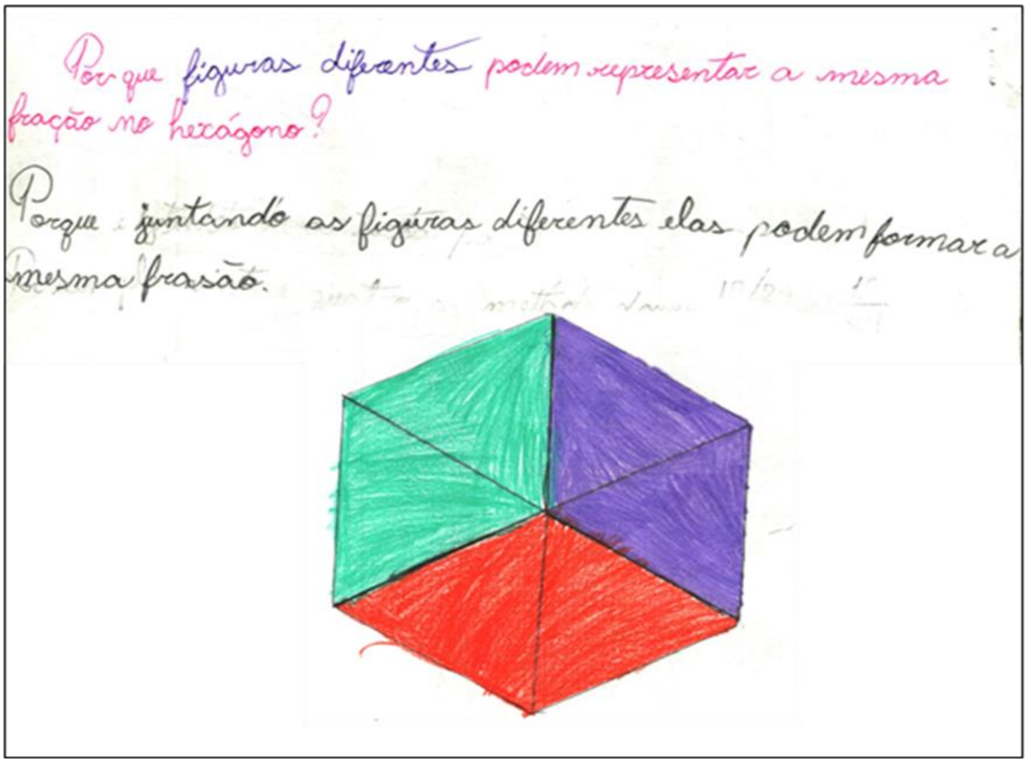


Figura 3.8 – Resposta do aluno ES93

A dificuldade na formulação de uma resposta escrita pode ser observada no trabalho do aluno ES70 (Figura 3.9). Consideramos que este, como outros alunos das quatro turmas, restringiu suas respostas à observação do que foi registrado na tarefa anterior, ou seja, simplesmente ao fato de terem associado e registrado por escrito frações iguais em três linhas da Tabela2.

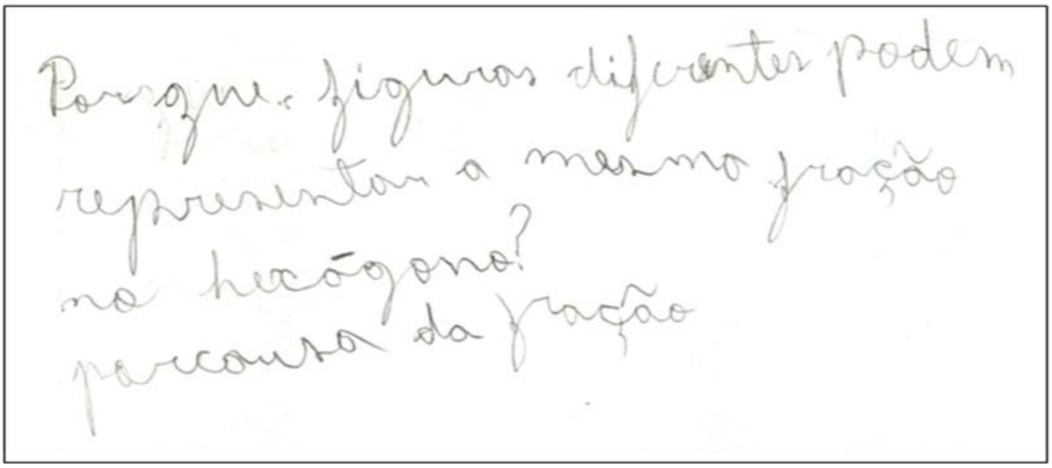


Figura 3.9 – Resposta do aluno ES70

Cabe ainda refletir que, conforme ensina Piaget (1987), as crianças das turmas participantes estariam no período das operações concretas, que se caracteriza por esquemas mentais que se referem a objetos ou situações passíveis de serem manipuladas ou imaginadas de forma concreta. Talvez por isso, uma das professoras tenha percebido que seus alunos tiveram mais facilidade de mostrar o “por que” do que de apresentar uma resposta escrita. Esta análise também ajuda a explicar o recurso a justificativas por meio de desenhos, apresentadas por alguns alunos.

Outro aspecto que merece destaque é a dificuldade no uso de vocabulário adequado ao que gostariam de expressar. Sabíamos que o conhecimento sobre área ainda não havia sido construído formalmente nas quatro turmas, mas esperávamos que os alunos recorressem a termos como “tamanhos iguais” ou “mesmo espaço” em suas respostas, recorrendo a noções intuitivas sobre medida de superfícies, ou seja, área. No entanto, como veremos a seguir, poucos alunos conseguiram fazê-lo, provavelmente, também, pelo estágio de seu desenvolvimento cognitivo.

Em nossa busca de estabelecer categorias de classificação das respostas fornecidas pelos alunos, verificamos que havia três grandes grupos com características comuns. Primeiro, foi preciso separar as produções de alunos que não conseguiram se expressar por escrito, ou que, pelo menos, não foi possível lhes dar significado. Num segundo grupo, separamos as respostas que parecem ter se apoiado apenas na observação do resultado da atividade de preenchimento da

Tabela2. No terceiro grupo, alocamos as respostas que, de alguma forma, se sustentavam em ideias intuitivas de área. A partir desta primeira separação do corpus da pesquisa em três grupos, buscamos identificar outras diferenciações no interior de cada um. Nesta fase de releitura ainda mais detalhada das respostas, desdobramos os dois grupos de respostas para os quais era possível atribuir algum significado, em dois subgrupos e ficamos, ao final com cinco subcategorias, que descreveremos a seguir.

Segundo Hart et al. (1981) e Campos e Cols. (1995 apud Nunes e Bryant, 1997), os estudantes têm facilidade em atividades que envolvem o procedimento de contagem dupla, aquele em que eles contam o número total de partes e o número de partes pintadas. Na nossa pesquisa isto foi evidenciado durante o preenchimento da Tabela2. Depois disso, alguns dos estudantes que responderam à nossa pergunta apoiados apenas no resultado do preenchimento da Tabela2, mais da metade deles também escrevem suas respostas referindo-se apenas à atividade de contagem. Tal situação fica clara em respostas do tipo: “porque são seis” ou “porque usamos seis partes”.

Dentre as respostas apoiadas apenas na visualização do resultado do preenchimento da Tabela2, observamos que algumas faziam referência do todo e em outras, tiveram a referência era a quantidade de partes.

Já as respostas que se apoiaram na conceituação intuitiva de área, detectamos que um grupo delas caracterizava-se pelo uso de termos como “ocupam o mesmo espaço”, “mesmo tamanho” ou “cabem na mesma forma”. A outra subcategoria se distingue pelo registro mais explícito da equivalência entre as áreas das peças.

O Quadro 3.1 apresenta a sistematização das categorias.

Quadro 3.1 – Categorias de análise

<table>
<tr><td rowspan="2">Repostas que demonstram dificuldade de expressão escrita</td><td colspan="2">Respostas apoiadas na observação da Tabela2</td><td colspan="2">Respostas apoiadas na conceituação de área</td></tr>
<tr><td>Redação apoiada na referência do todo</td><td>Redação apoiada na referência das partes</td><td>Uso de termos relacionados à área</td><td>Uso da noção intuitiva de equivalência entre áreas</td></tr>
</table>

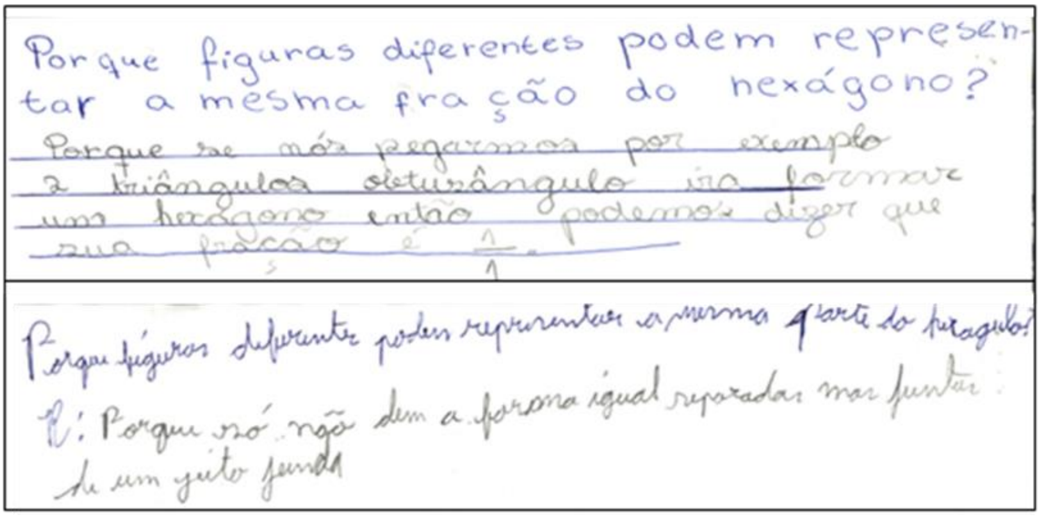
3.4 – Compreendendo as respostas dos alunos

Esta seção tem como objetivo aprofundar a análise das respostas dos estudantes, de acordo com as categorias estabelecidas.

3.4.1 - Análise das respostas dos alunos

Como primeira de nossas categorias, classificamos as respostas que consideramos incompreensíveis, na maioria das vezes por parecerem truncadas. Sem dúvida, esses alunos não conseguiram expressar suas ideias e isso pode se originar de diferentes causas. Como já comentado, as crianças participantes estão numa fase de seu desenvolvimento na qual a redação de um texto argumentativo, sem o apoio do concreto, ainda pode ser difícil. Além disso, o processo de alfabetização na língua materna ainda não está consolidado e, muito menos o de letramento. Este, que ao longo da vida se enriquece de diversas possibilidades de leitura e escrita, se diferencia de pessoa para pessoa, segundo as experiências a que são expostas. Assim, o fato de ser pouco frequente o uso de atividades do tipo solicitado nas aulas de matemática de maneira geral e também nas turmas participantes, sem dúvida se refletiu nas produções dos alunos.

A resposta do aluno ES70 (Figura 3.9), em que ele escreve “por causa da fração”, pode ser uma referência à simples observação de que a fração um sexto se repete associada às três diferentes peças. No entanto, seu texto não nos permite fazer tal afirmação. Registramos a seguir outras respostas de alunos que apresentaram este tipo de dificuldade (Figuras 3.10 e 3.11):


Porque figuras diferentes podem representar a mesma fração do hexágono?
Porque se nós pegarmos por exemplo 2 triângulos obtusângulo irá formar um hexágono então podemos dizer que sua fração é $\frac{1}{1}$.

Porque figuras diferentes podem representar a mesma parte do hexágono?
R: Porque só não dem a forma igual separadas mas juntas de um jeito junda

Figura 3.10 – Resposta apresentadas pelos alunos ES17 e ES27, respectivamente

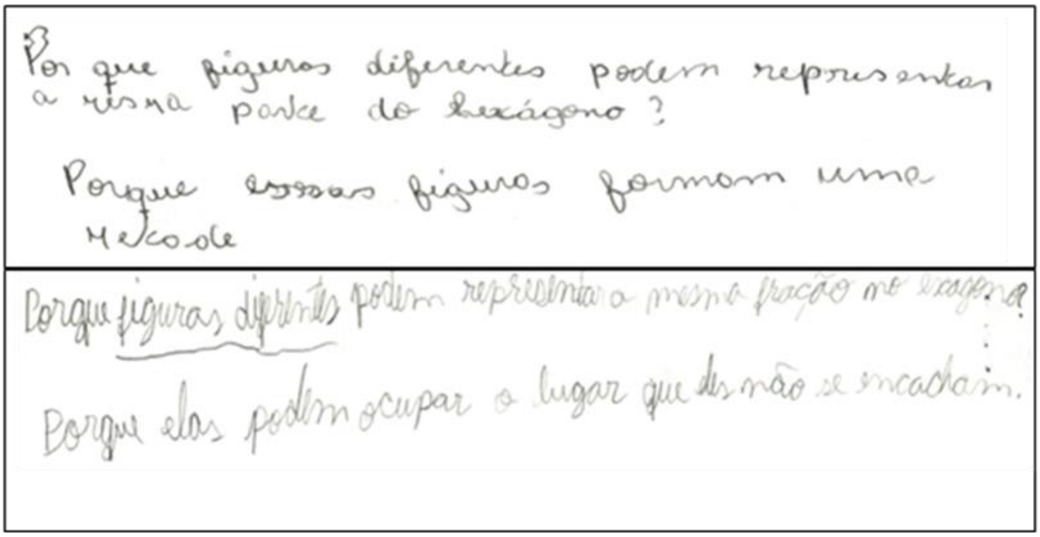
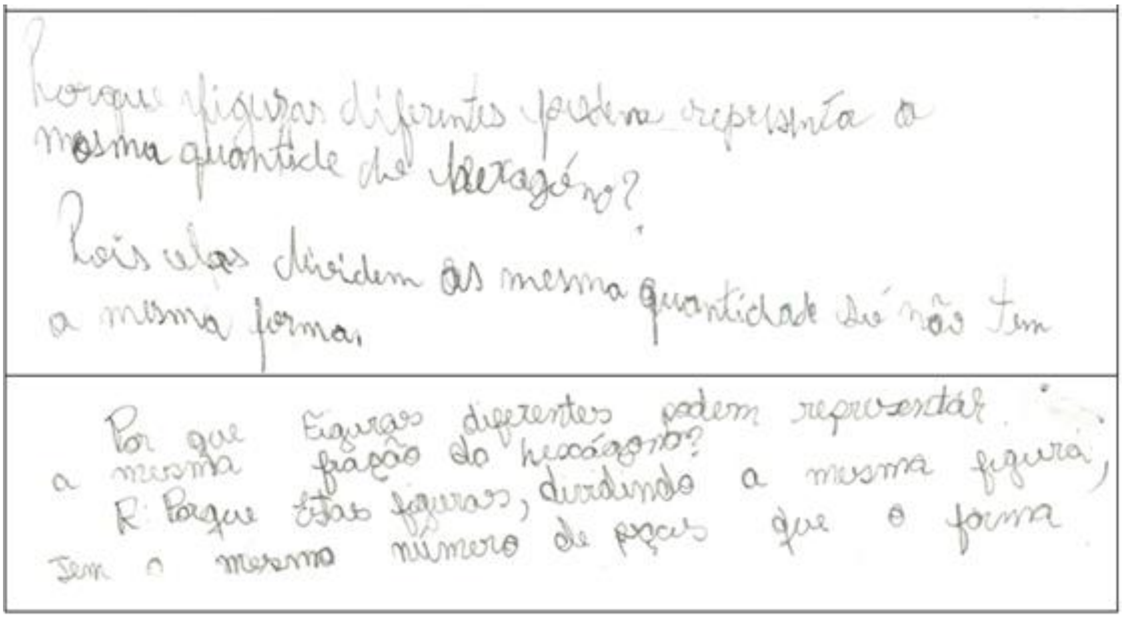


Figura 3.11 – Resposta apresentadas pelos alunos ES44 e ES50, respectivamente

Possivelmente, estes cinco alunos tinham alguma hipótese como ponto de partida, mas não a conseguiram explicar através da escrita, inclusive por não estarem acostumados a redigir em aulas de matemática. Como não estava previsto entrevistar cada aluno para melhor compreender suas hipóteses ou dificuldades, é impossível estabelecer o que pode ter motivado cada uma das respostas aqui consideradas como não compreensíveis. É possível, inclusive, que estes alunos não tenham sequer compreendido a pergunta.

Na categoria das respostas apoiadas na atividade da Tabela2 encontramos registros escritos que se remetem a esta atividade. Para preencher esta tabela, era necessário determinar as frações, obtidas pelo processo de contagem, escrevê-las por extenso e depois usando a notação de fração. Esta categoria foi subdividida em duas subcategorias: as que faziam referência ao todo e as que se apoiavam na quantidade de partes. Entretanto, ambas se restringem a registrar a relação parte-todo. Vejamos alguns exemplos (Figura 3.12) nos quais consideramos que a resposta faz a referência às partes:



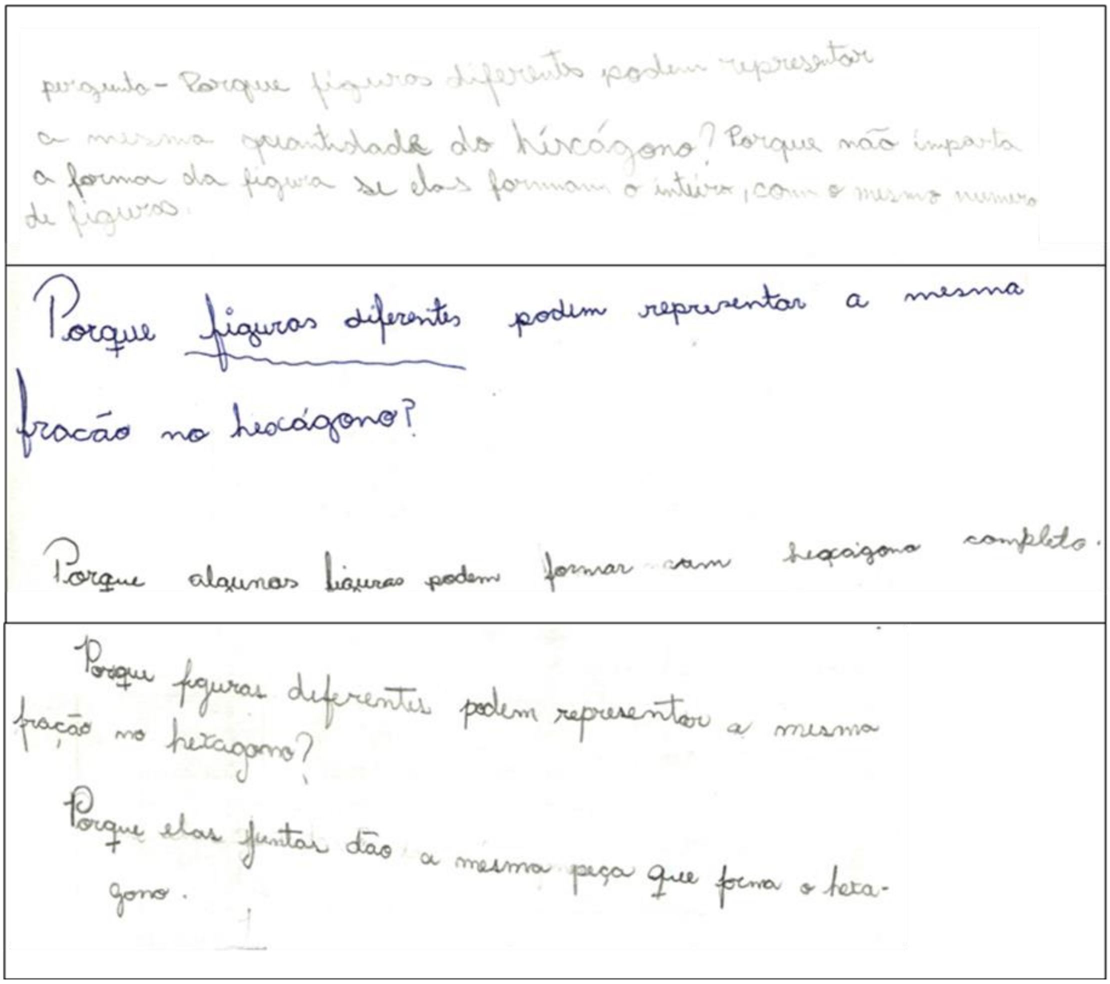
Porque figuras diferentes podem representa a mesma quantidade do hexagono?
Pois elas dividem as mesma quantidade só não tem a mesma forma.

Por que figuras diferentes podem representar a mesma fração do hexágono?
R: Porque estas figuras, dividindo a mesma figura, tem o mesmo número de peças que o forma

Figura 3.12 – Resposta apresentadas pelos alunos ES25 e ES29, respectivamente

O estudante ES25 escreveu que o inteiro foi dividido com a mesma quantidade de peças, ou seja, seu foco foi a igualdade da quantidade de peças. O participante ES29 considerou que mesmo que as peças tenham formato diferente, a quantidade delas para cobrir o inteiro é a mesma (“mesmo número de peças”). Podemos observar que neste tipo de respostas, a relação parte-todo é evidenciada por termos relacionados às partes.

Num outro subgrupo, separamos as respostas que consideramos colocarem o foco da relação parte-todo no todo, ou seja, no inteiro, como nos exemplos da Figura 3.13.



pergunta - Porque figuras diferentes podem representar a mesma quantidade do hexágono? Porque não importa a forma da figura se elas formam o inteiro, com o mesmo numero de figuras.

Porque figuras diferentes podem representar a mesma fração no hexágono?

Porque algunas figuras podem formar com hexágono completo.

Porque figuras diferentes podem representar a mesma fração no hexágono?

Porque elas juntar dão a mesma peça que forma o hexa-gono.

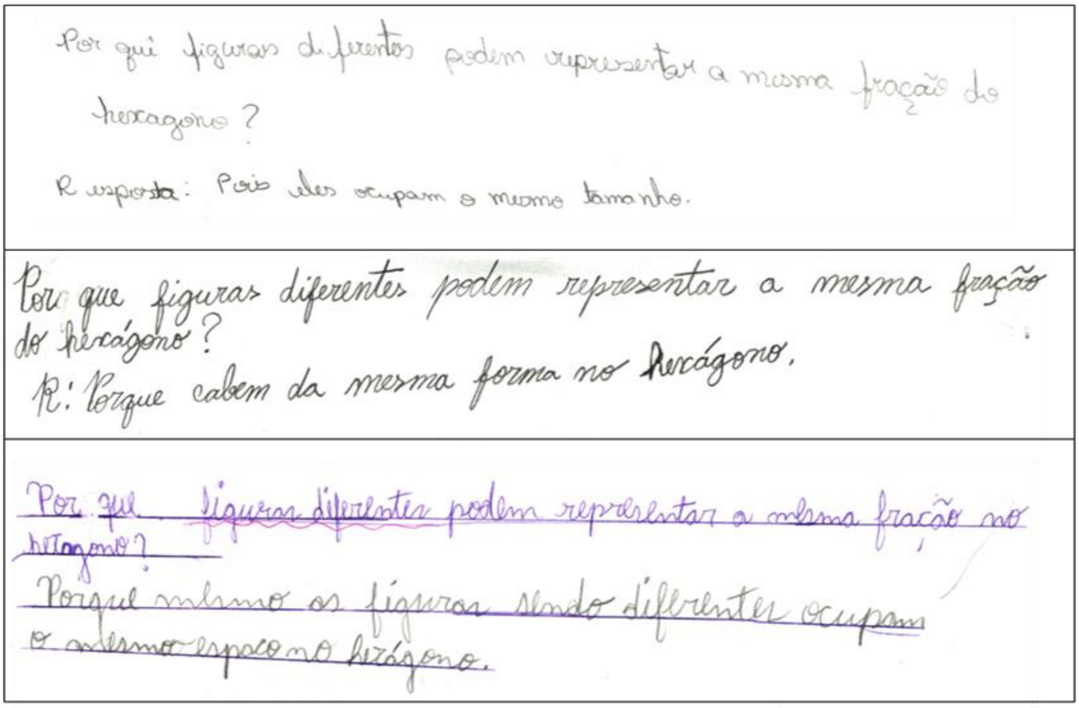
Figura 3.13 – Resposta apresentadas pelos alunos ES37, ES66 e ES74, respectivamente

Nestes exemplos, nos pareceu que os alunos queriam evidenciar que o inteiro na sua totalidade, composto pelas partes, não se altera. Verificamos que o uso dos termos “formam o inteiro” ou “forma o hexágono” são usados de modo recorrente.

A outra categoria se configura pelo grupo de respostas que se apoiaram na conceituação intuitiva de área. A medida de superfícies, chamada área, pode ser obtida através de comparação entre uma superfície e outra que foi escolhida como unidade de medida. No caso das atividades da sequência didática desta pesquisa, recorremos à superposição de peças, o que nomeamos como cobertura. Várias coberturas foram propostas e realizadas, considerando o hexágono como inteiro. No entanto, espontaneamente, alguns grupos de alunos criaram coberturas que tomavam outras peças como inteiro, realizando diversas comparações de medidas de comprimento, lados das peças, e de suas áreas.

O objetivo da pergunta cujas respostas são objeto de nossas análises - *Por que figuras diferentes podem representar a mesma fração do hexágono?* - era promover a associação entre o conceito de fração e o de área, tão necessária na relação parte-todo. Observamos que alguns alunos perceberam que a resposta à nossa questão envolvia a comparação entre as áreas das peças em foco, as associadas à fração 1/6, ou seja, foram usadas seis de cada uma delas para cobrir o hexágono. Dentre estas respostas, temos aquelas em que os alunos usaram termos relacionados à noção intuitiva de medida de área e, respostas que, além disso, revelavam que os alunos verificaram equivalências entre as peças e, por conseqüência, entre as frações que as representam.

Os exemplos apresentados na Figura 3.14 fazem parte do grupo de respostas que compõe a subcategoria que se distingue pelo uso de termos relacionados à área.


Por quê figuras diferentos podem representar a mesma fração do hexagono ?
Resposta: Pois eles ocupam o mesmo tamanho.

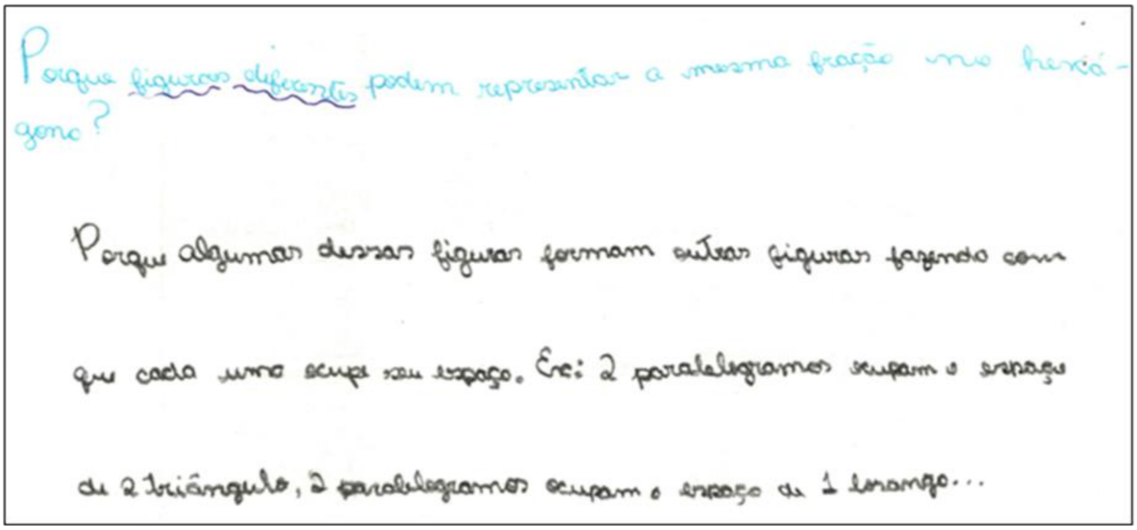
Por que figuras diferentes podem representar a mesma fração do hexágono?
R: Porque cabem da mesma forma no hexágono.

Por que figuras diferentes podem representar a mesma fração no hexagono?
Porque mesmo as figuras sendo diferentes ocupam o mesmo espaço no hexágono.

Figura 3.14 – Resposta apresentadas pelos alunos ES36, ES38 e ES67, respectivamente

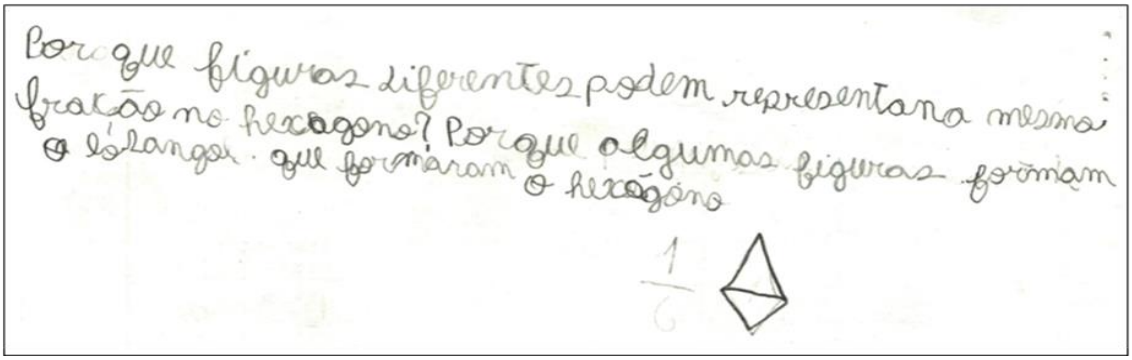
Podemos observar nestes exemplos o uso de termos relacionados à ideia de medida de superfície, tais como “ocupam o mesmo espaço” , “ocupam o mesmo tamanho” e “cabem na mesma forma”.

Apresentamos a seguir exemplos de respostas que apresentam argumentações mais consistentes, buscando explicitar suas estratégias de comparação entre as medidas das superfícies das peças, tendo o hexágono como inteiro, estabelecendo equivalência entre elas (Figuras 3.15, 3.16 e 3.17).


Porque figuras diferentes podem representar a mesma fração no hexá-gono?

Porque algumas dessas figuras formam outras figuras fazendo com que cada uma ocupe seu espaço. Ex: 2 paralelogramos ocupam o espaço de 2 triângulo, 2 paralelogramos ocupam o espaço de 1 losango...

Figura 3.15 – Resposta apresentadas pelo aluno ES56


Porque figuras diferentes podem representar a mesma fração no hexagono? Porque algumas figuras formam o lósango. que formaram o hexágono

$\frac{1}{6}$

Figura 3.16 – Resposta apresentadas pelo aluno ES89

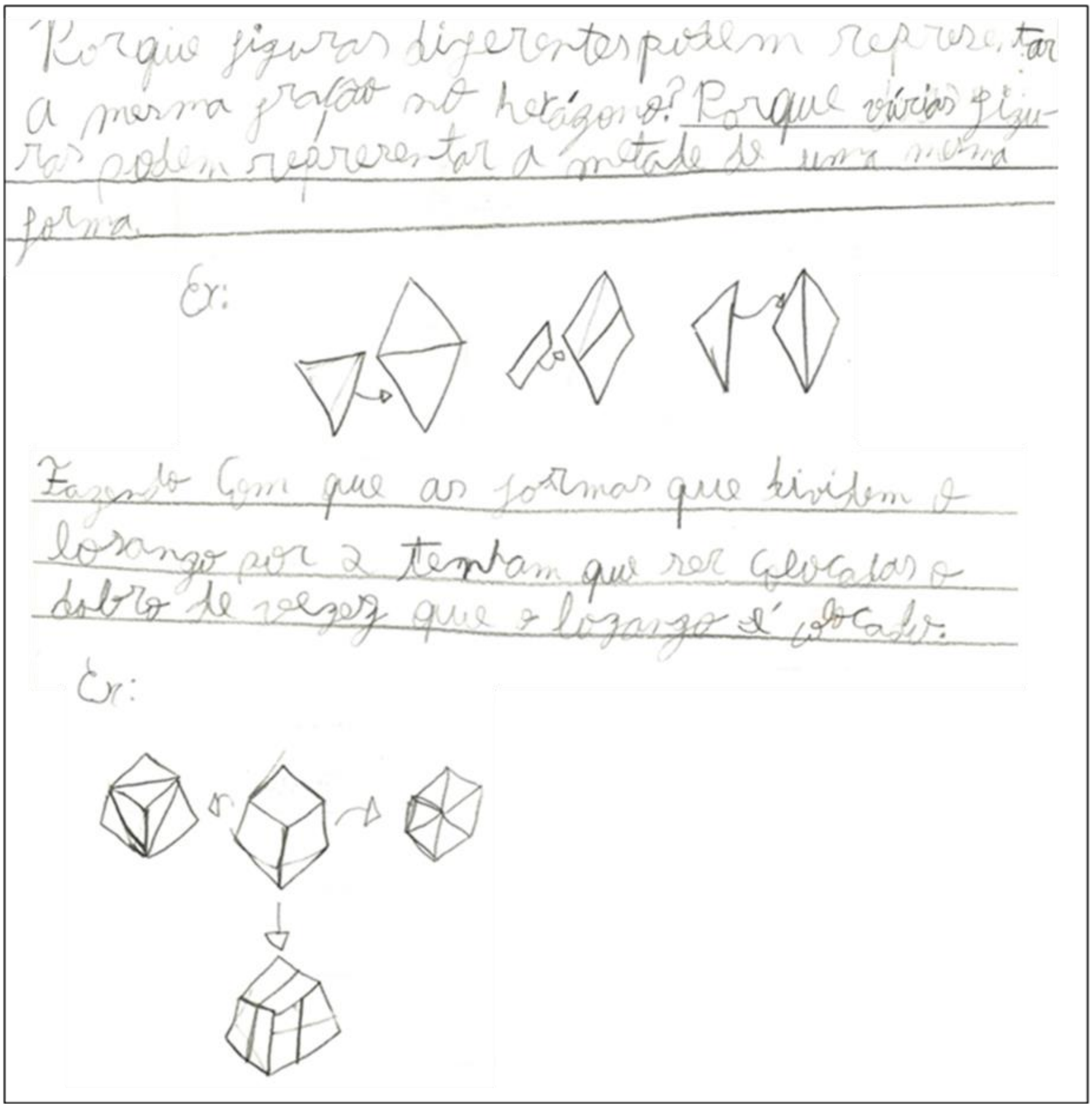
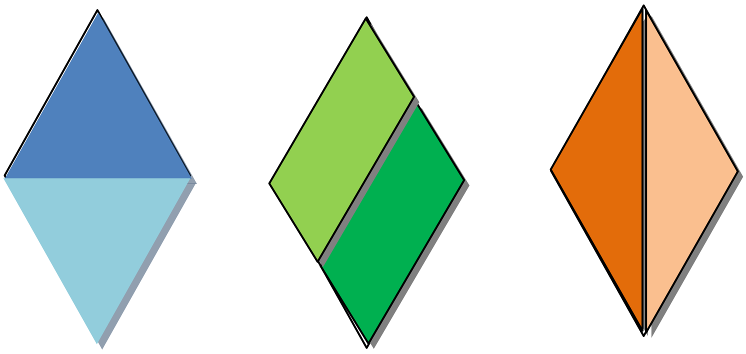


Figura 3.17 – Resposta apresentadas pelo aluno ES81

Podemos notar que estes alunos redigiram argumentações apoiados nas estratégias de comparação entre as áreas das peças, buscando para isso exemplificar a(as) equivalência(s) observada(s).

Nas três respostas exemplificadas, observa-se que o losango foi usado como referência, o que evidencia o recurso a duas relações entre áreas interessantes. Parece-nos que os alunos observam mais facilmente que o losango pode ser formado por duas de cada uma das peças em questão, ou seja, 2 triângulos equiláteros grandes, 2 paralelogramos e 2 triângulos obtusângulos. A seguir, usam o fato de que o losango é 1/3 do hexágono e, portanto, isso explica o fato de cada uma das peças citadas, corresponder a 1/6 do hexágono.



As fotos a seguir, tiradas enquanto os alunos realizavam experiências na busca de responder ao desafio proposto (Figuras 3.18 e 3.19), mostram experiências desse tipo. Vários alunos buscaram relações entre as áreas como as dos exemplos a seguir, mesmo aqueles que não conseguiram expressá-las por escrito.

Figura 3.18 – Soluções que equivalem ao losango

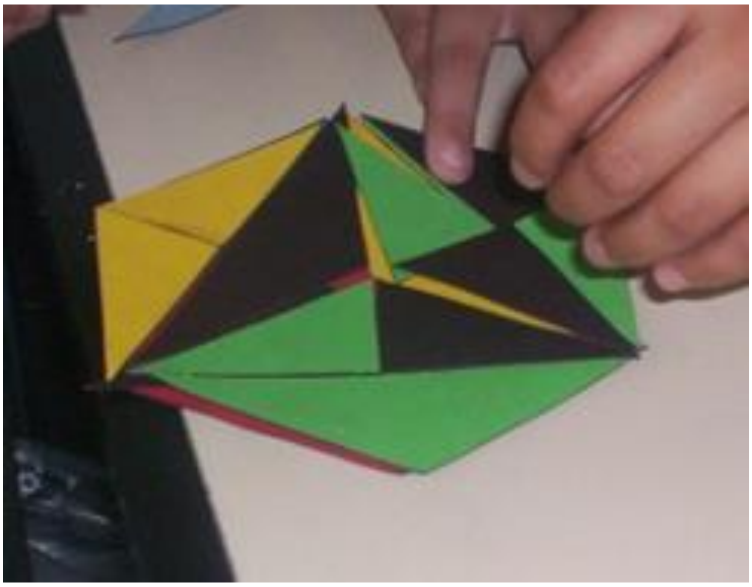


Figura 3.19 – Hexágono coberto por peças que equivalem ao losango

Nesta seção foram exemplificadas as respostas dos alunos em cada categoria e subcategoria. Na sequência deste texto, apresentaremos o quantitativo de repostas em cada caso.

3.4.2 - Visão geral das respostas dadas pelos estudantes

Após este relato, apresentamos a incidência das respostas dadas, pelos alunos das quatro turmas, em relação às categorias. A Tabela 3.2 informa a distribuição deste quantitativo.

Tabela 3.2 – Quantidade de respostas em cada categoria

Categorias	Quantidade de respostas	%
Respostas que evidenciam dificuldade na expressão escrita	**5**	**6%**
Respostas apoiadas na observação da Tabela2	**42**	**50%**
- Redação apoiada na referência do todo	29	
- Redação apoiada na referência das partes	13	
Respostas apoiadas na conceituação de área	**37**	**44%**
- Uso de termos relacionados à grandeza área	10	
- Uso da noção intuitiva de equivalência entre áreas	27	
Total de respostas	**84**	**100%**

A tabela 3.2 mostra que, considerando as quatro turmas participantes da pesquisa em conjunto, metade dos alunos redigiram respostas apoiadas na observação da Tabela2. Já os que redigiram respostas apoiadas na conceituação intuitiva de área foram 37. Em termos percentuais, observa-se que apenas 6% dos 84 alunos não conseguiram redigir uma resposta compreensível; 50% das respostas compuseram a segunda categoria; e 44% a terceira.

Ao lembrar que, segundo Behr et al. (1983), um modelo concreto é significativo para uma criança, mas pode não ser para outra, devemos considerar que apenas a realização de experiências de manipulação com materiais concretos não garante a eficácia da construção de um conceito. Ao planejar a sequência didática, considerávamos que a Tabela2 seria indutora da pergunta: mas porque peças diferentes ficaram associadas a um mesmo resultado, uma mesma fração? De fato, isso correu, mas não podemos afirmar quantos alunos levantariam este questão, já que ao ser proposta por pelo menos um, as professoras conduziram para a atividade seguinte, aliás, como era de se esperar.

Observamos também que os alunos buscaram estratégias diferentes para encontrar uma solução para o desafio e caminhos diferenciados para redigir suas respostas. Behr et al. (1983) também alertam que jovens estudantes organizam as soluções dos problemas de modo diverso, uns podem pensar de uma forma mais concreta e outros podem recorrer a procedimentos mais abstratos, que levam à argumentação escrita com mais facilidade.

Sabendo que as turmas participantes ainda não havia realizado um trabalho sistematizado com o conceito de área, o resultado é bastante positivo. Consideramos grande a proporção de respostas que recorreram a ideias intuitivas de medida de superfície, que realizaram comparações e, portanto usaram equivalência entre áreas. Além disso, dentro das características cognitivas próprias de sua faixa etária, alguns alunos chegaram a esboçar demonstrações para provar o que concluiram. Para isso, recorreram a desenhos para evidenciar que algumas áreas de peças do material manipulativo eram equivalentes.

Outro ponto que merece destaque é que apenas cinco alunos, ou seja, 6% do total apresentaram dificuldade na expressão escrita, de modo a comprometer sua interpretação. Na verdade, muitos estudantes tiveram dificuldade para redigir suas respostas, ccometendo desvios na grafia das palavras, na concordância e na construção das frases. Entretanto, considerando que estas crianças estão em processo de consolidação de sua alfabetização, iniciando o segundo ciclo de escolaridade, é bastante positivo termos 94% das respostas passíveis de interpretação.

3.4.3 - As respostas, os resultados encontrados e sua relação com a aplicação da sequência didática

A partir das análises das respostas, passamos a refletir sobre a relação entre os resultados encontrados e a ação docente na aplicação da sequência didática.

A Professora1 procurou seguir o manual do professor para a aplicação da sequência didática, oferecendo aos seus alunos possibilidades de exploração do material, socialização das soluções e momentos de sistematização. A Professora2 também proporcionou situações de exploração do material, socialização das soluções e sistematização. No entanto, fez uma maior quantidade de adaptações em relação às sugestões contidas no manual, como relatado na seção 3.2 deste texto.

Sem dúvida, as diferentes vivências conduziram a diferenças na construção das respostas dos alunos. A Tabela 3.3 apresenta o quantitativo das categorias de respostas, por professor.

Tabela 3.3 – Quantidade de respostas em cada categoria, por professor

Categorias	Alunos da Professora1	Alunos da Professora2	Total
Respostas que evidenciam dificuldade na expressão escrita	3	2	5
Respostas apoiadas na observação da Tabela2	**33**	**9**	**42**
- Redação apoiada na referência do todo	22	7	29
- Redação apoiada na referência das partes	11	2	13
Respostas apoiadas na conceituação de área	**9**	**28**	**37**
- Uso de termos relacionados à grandeza área	7	3	10
- Uso da noção intuitiva de equivalência entre áreas	2	25	27
Total de respostas	**45**	**39**	**84**

Os alunos da Professora1 fizeram experiências de coberturas entre diferentes peças do material, usando como inteiro não apenas o hexágono (Figura 3.2). No entanto, apenas nove estudantes desta professora, isto é, 20% dos alunos, conseguiram utilizar suas experiências de comparação de áreas para redigir a resposta ao desafio proposto. Dentre as produções dos alunos da Professora2, 57% de respostas recorreram a noções intuitivas de área.

Ball (1993) afirma que os professores tem padrões, razões e preocupações que determinam as decisões na hora de ensinar matemática. Mas, conforme explica Mandarino (2006), o modelo de ensino

> [...] baseado no conceito de contrato didático é o que mais ajuda a compreender, para além da seleção de conteúdos e da abordagem adotada, as relações interpessoais e as diversas situações de gerenciamento das aulas [...]. (Ibid., p.218)

Para Pais (2008), o contrato didático é um conjunto recíproco de comportamentos esperados entre alunos e professor, sendo mediados pelo saber. Pais (Ibid.) e Brousseau (2008) estabelecem diferenciações sobre os tipos de contrato didático, elucidando suas dinâmicas e a quebra delas. Entretanto, como esta temática não é foco desta pesquisa, interessa-nos compreender apenas o quanto a prática e, portanto, o contrato didático, influenciou as respostas dadas pelos alunos participantes.

É possível que as adaptações feitas pela Professora2 tivessem aproximado a sequência didática de sua dinâmica cotidiana, promovendo um sentimento de segurança para ela e para os alunos. Este fato pode ter gerado conforto, possibilitando um desempenho que podemos considerar melhor, já que com alguma autonomia, mais alunos recorreram à noções intuitivas de área, e dentre eles, percebemos uma estruturação das respostas mais amadurecidas do ponto de vista do desenvolvimento do pensamento matemático. Foram mais frequentes as respostas com caráter argumentativo e que buscaram expressar provas, no sentido matemático, para o nível de escolaridade em foco.

Provavelmente a sequência didática ofereceu muitas novidades para os alunos participantes, mas, como mencionado no relato das observações, o desenvolvimento das atividades nas turmas da Professora2 ultrapassou o tempo previsto. Talvez isso tenha dado a seus alunos mais oportunidades para fazer experiências pessoais e discuti-las com os colegas de grupo. Enquanto isso, nas turmas da Professora2, o tempo para realização das atividades não ultrapassou o que os planejadores da sequência didática estimaram com necessário. O contrato didático vigente em suas turmas, no entanto, parece não incentivar a autonomia individual dos alunos. O trabalho coletivo, da socialização dos resultados por toda a turma, foi bastante valorizado, talvez abafando um pouco as discussões dentro dos pequenos grupos.

Faz-se necessário considerar que a Professora2, ao subdividir o que estava planejado para a segunda aula da sequência didática em dois dias letivos diferentes, parece ter realizado outras atividades envolvendo frações em aulas não observadas por nós. Tal suposição se deve à nossa observação da correção de uma atividade de casa no início da segunda metade do que seria a segunda aula da sequência, ao explorar com os alunos o significado da palavra “avos”. É bem provável que as atividades desenvolvidas entre o preenchimentos da tabelas 1 e 2, possam ter contribuído para um amadurecimento dos alunos em relação aos conceitos em foco. Provavelmente o apoio na observação da Tabela2 tenha sido mais significativo nas turmas da Professora2 pelo fato da pergunta ser proposta imediatamente depois da finalização daquele preenchimento.

3.5 – A relação entre os resultados e a pergunta desta pesquisa

A pergunta feita aos alunos, imediatamente após a atividade da Tabela 2, tinha como objetivo dar início ao necessário desprendimento de um referencial didático, para que um conceito seja efetivamente construído. Afinal, “um dos grandes méritos dos modelos matemáticos é o de poderem ser aplicados a muitas situações aparentemente diferentes, mas que são estudadas com base em um mesmo modelo.” (CARVALHO & LIMA, 2010, p.16). No desafio proposto, após as experiências vivenciadas para preenchimento da Tabela2, consideramos que a observação dos resultados levaria à constatação de que três peças diferentes estavam associadas a uma mesma fração, no caso 1/6, o que de fato ocorreu em todas as turmas. No entanto, a condução das aulas não nos garante que todos os alunos tenham observado este fato e, muito menos, que tal resultado tenha provocado uma curiosidade genuinamente matemática.

O desafio proposto, além de exigir uma postura investigativa para a qual os alunos poderiam recorrer ao material didático, exigia a elaboração de uma resposta escrita, que poderia, ou não, incluir representações por meio de desenhos. Percebemos que este foi um desafio, para além do desafio matemático. Cabe ainda destacar a respeito deste fato, que nos pareceu que a prática de argumentação e justificação em aulas de matemática, se ocorrem nas aulas dos professores participantes, provavelmente se restringem à argumentação oral e coletiva. Esta pode ser uma justificativa para a dificuldade expressada por muitos alunos. Outro aspecto relativo à forma de apresentar a resposta que nos chamou atenção foi o pouco uso do recurso à representação gráfica, ou seja, ao desenho. Talvez, para os alunos, responder por escrito se restrinja ao uso de palavras, desconsiderando outras possibilidades de registro escrito.

A pergunta que levantamos para esta pesquisa foi: **O modelo utilizado para a apresentação do conceito de fração, através do subconstruto parte-todo, possibilita o desprendimento do formato das partes em relação a uma mesma unidade?.** Isto é, desejávamos investigar se, mesmo introduzindo o conceito de fração por meio de um material manipulativo que toma como referência sempre a mesma peça como o inteiro, os alunos estabeleceriam outras relações entre o conjunto de peças. Para isso, uma "descoberta" preliminar se faria necessária: perceber que na relação parte-todo o que está em jogo é a subdivisão da área do todo em partes com áreas iguais. Apenas com tal construção o desprendimento do formato das partes, em relação ao que se considera como unidade pode ocorrer.

Hart et al. (1981) sinalizam que quando os estudantes trabalham com um conjunto de peças de forma e tamanho idênticos, as frações são de fácil identificação e representação. Entretanto, afirmam que quando as peças têm tamanhos diferentes, diante de uma gama maior de possibilidades, os alunos apresentam dificuldade para reconhecer as frações envolvidas. A sequência didática, criada pelo grupo de pesquisa LIMC-Mais, foi proposta com a preocupação de possibilitar que o material manipulativo não fosse um obstáculo, mas sim um facilitador no processo de aprendizagem. Tal perspectiva fica evidenciada no manual do professor que acompanha o material e pelo desafio analisado neste trabalho, além de outros, propostos a seguir, para que o inteiro seja variável e o aluno não se prenda a um modelo único.

Os resultados mostram que o desafio levou os alunos a refletirem sobre a questão da área e sobre outras comparações possibilitadas pelo material, mesmo para aqueles que não conseguiram expressar suas experiências de forma efetiva. O favorecimento para o desprendimento do formato das partes em relação a uma mesma unidade foi então iniciado, na medida em que tivemos respostas como a dos alunos ES56 e ES89 (Figuras 3.15 e 3.16), entre outras, e, sobretudo a consistência da argumentação de estudantes como ES81 (Figura 3.17). Das 84 respostas analisadas, 37 se apoiaram na conceituação de área e, quase 73% delas conseguiram estabelecer equivalências entre as áreas.

Lembramos, entretanto, que os resultados destas análises são pertinentes a esta pesquisa, ou seja, não cabem generalizações, nem mesmo quanto a outros alunos do 4º ano do Ensino Fundamental matriculados em outras unidades do Colégio Pedro II. Devemos considerar que é possível que se esta sequência didática for aplicada em outro contexto, os resultados sejam diferentes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tive um chão (mas já faz tempo) todo feito de certezas tão duras como lajedos.
Agora (o tempo é que fez) tenho um caminho de barro umedecido de dúvidas.
Mas nele (devagar vou) me cresce funda a certeza de que vale a pena o amor.

Thiago de Mello[11]

No ensino da Matemática, o estudo das frações é um tema que causa preocupação em virtude das dificuldades que os estudantes apresentam durante a vida escolar. Ao longo dos anos, minhas inquietações sobre estas dificuldades me levaram a pesquisar sobre este tema, objetivando trazer reflexões e contribuições para o ensino deste campo numérico.

O grupo de pesquisa LIMC-Mais foi meu primeiro contato com estudos mais aprofundados e pesquisas sobre o ensino de frações. Com base no material manipulativo e na sequência didática, ambos construídos e elaborados por este grupo, pudemos delimitar um campo de estudo que se tornou um subprojeto do seu programa mais amplo de pesquisa, e que desencadeou esta dissertação de mestrado.

Deste modo, primeiramente, buscamos um referencial teórico que contribuísse para o aprofundamento dos estudos de fração, uma vez que percebemos, através da revisão bibliográfica, que muitos professores levam para a sua prática uma lacuna na conceituação de fração, desconsiderando a complexidade que este tema envolve.

Planejamos que a aplicação da sequência didática deveria atingir alunos que apresentassem uma diversidade de experiências de aprendizagem e, ao contarmos com a participação de uma integrante do grupo de pesquisa que é professora do Colégio Pedro II, encontramos o contexto para esta pesquisa.

Num primeiro momento, desejávamos estudar questões relacionadas à prática docente mediante a sequência didática para a introdução do ensino de frações, mas este estudo não teria o aprofundamento inerente a uma pesquisa acadêmica com somente duas professoras. Então, por percebermos que os primeiros entendimentos que a criança tem sobre este campo numérico poderiam

[11] Disponível em: http://pensador.uol.com.br/frase/NTI2MDU3/ Acesso em 22 jun.2011.

sinalizar os entraves que caracterizam esta aprendizagem, redirecionamos nosso objetivo. Decidimos investigar os conhecimentos que as crianças expressam sobre o conceito de fração, quando este é apresentado através de uma sequência didática que prioriza o subconstruto parte-todo e o quanto as diferentes formas do material manipulativo oferecido podem favorecer o desprendimento do formato das partes em relação a uma mesma unidade. Para isso, utilizamos os dados provenientes de observações e da produção dos estudantes durante a aplicação para análises.

Após muitas leituras, reflexões e análises do material coletado, apresentamos conclusões sobre os elementos desta pesquisa, referenciando-nos na pergunta e nos objetivos inicialmente traçados.

As respostas dos alunos nos levaram a três grupos de respostas. Tivemos um grupo que demonstrou dificuldade de expressão escrita; outro que se fixou na atividade que acabara de realizar e ainda o grupo que se apoiou na conceituação de área. Houve certo equilíbrio entre o percentual de incidência de respostas que caracterizam o segundo e o terceiro grupos, 50% das respostas e 44%, respectivamente.

Outro ponto relevante desta análise foi a relação entre a ocorrência das respostas e a aplicação da sequência didática. Pareceu-nos também que as adaptações feitas pela Professora2, em relação ao manual de aplicação, aproximaram-se do contrato didático vigente em suas turmas. Percebemos que nessas turmas, uma das adaptações foi que a duração para a realização das atividades foi estendida. Com isso, os alunos desta docente tiveram a maior parte das suas respostas apoiadas na conceituação de área.

Com base nos resultados das análises, notamos que quando o conceito de fração é apresentado com enfoque no subconstruto parte-todo, através de aplicação de uma sequência didática que oferece material manipulativo, os alunos demonstraram ter conhecimento sobre este campo numérico. Eles tiveram bom desempenho para escrever a notação das frações que estavam relacionadas às peças do material manipulativo. Mesmo quando as peças mudavam, alterando a grandeza de medida, os estudantes não apresentaram dificuldade.

Pudemos então reconhecer que houve um favorecimento para um desprendimento do formato das partes em relação a uma mesma unidade.

Respostas como a dos alunos ES56, ES81 e ES89, mostradas no capítulo de análise, exemplificam nossa afirmação.

Durante as observações, percebemos que a Professora1 ouvia seus alunos, socializava suas ideias, e fazia intervenções quando necessário. Levantamos então, a hipótese de que os alunos desta docente produziriam respostas com boa consistência argumentativa, balizando-nos no que foi apontado por Behr et al. (1983):

> Uma questão de interesse é que a ênfase na linguagem oral pode desempenhar um papel intermediário e facilitador para preencher a grande lacuna, aparentemente, entre a capacidade de um aluno para representar ideias matemáticas com materiais manipulativos e a capacidade para representar as mesmas idéias com simbolismo matemático. (Ibid., p.121)

Entretanto, após as análises, esta hipótese não se verificou. E os mesmos pesquisadores nos dão pistas das possíveis justificativas para esta premissa não se concretizar:

> Idéias matemáticas geralmente existem em mais de um nível de sofisticação. Eles simplesmente não passam de " não entende " para " domina ". Portanto, eles devem se desenvolver periodicamente, e devem ser incorporados progressivamente a sistemas mais complexos que podem alterar significativamente a sua origem de interpretação. (BEHR *et al*., 1983, p. 104-105)

Recaímos então no que nos pareceu ser plausível: ao procurar seguir as orientações do manual do professor da sequência didática, inclusive na questão da duração das atividades, a Professora1 não teve tempo para verificações e intervenções que favorecessem a construção de argumentações mais consistentes.

Como esta investigação é também um subprojeto do programa mais amplo de pesquisa do grupo LIMC-Mais, encaminharemos duas sugestões, desejando contribuir para o aprimoramento da sequência didática. Uma delas é a acréscimo no tempo, sobretudo para as verificações de peças com áreas equivalentes. Conforme relatamos, a Professora2 ampliou a duração das atividades quando promoveu o preenchimento das tabelas em aulas diferentes. Nesta divisão de tarefas, os alunos desta docente tiveram mais tempo para explorar o material e refletir acerca do que faziam.

Entretanto, se considerarmos também que no intervalo de tempo entre o preenchimento das Tabelas 1 e 2, a Professora2 pode ter desenvolvido outras atividades que podem ter contribuído para um amadurecimento dos alunos em relação aos conceitos em foco. Com isso, as observações da Tabela2 podem ter se tornado mais significativas, gerando respostas mais consistentes na argumentação. Poderíamos até fazer alguns questionamentos sobre este desempenho: o que teria acontecido se a professora da turma não fosse a aplicadora da sequência didática? O que fez a Professora2 usar um intervalo de tempo entre as atividades?

A outra sugestão é em relação às atividades das tabelas. No caso da Tabela1(Anexo 2), poderíamos suprimir a segunda coluna porque, ao solicitarmos que os alunos representassem quantas partes cabem no hexágono, nos deparamos com a dificuldade para desenhar as peças. É o caso da representação de vinte e quatro triângulos eqüiláteros num pequeno espaço (Anexo 1). Para completar a Tabela2 (Anexo 3), há orientações contidas no manual do professor, mas para quem não tem acesso a este manual, não fica claro que a segunda coluna deve ser preenchida com as notações das frações e o primeiro impulso é de repetir o que foi registrado na primeira coluna. Precisamos, portanto, repensar em como diferenciar e melhorar o comando, para que não haja dúvida para cumpri-lo.

Contudo, refletiremos com grupo LIMC-Mais que verificamos que o trabalho com a sequência didática favorece que não haja erros relacionados à identificação e representação de uma fração. Apesar de Hart et al. (1981) sinalizarem que, quando num material manipulativo as peças têm tamanhos diferentes o aluno se distrai com a variedade de possibilidades, apresentando dificuldade para reconhecer as frações envolvidas, isso não ocorreu nas aplicações desta pesquisa.

Seguindo as indicações de Behr et al (1983) quanto à escolha do material mais apropriado para a estrutura de um subconstruto e levando em conta a recomendação de Ball (1993) em relação ao respeito que se deve ter quanto ao repertório que os estudantes trazem, verificamos, através dos resultados desta pesquisa, que o modelo que apresentamos foi adequado, tanto em relação ao subconstruto parte-todo, quanto às possibilidades dos alunos.

O ensino de frações, conforme Kerslake (1986) recomenda, precisa de cautela. A ampliação dos conjuntos numéricos não é simples, a passagem dos números naturais para os números racionais requer a construção de uma outra lógica, sobretudo na forma fracionária. Quando o estudo das frações inicia-se, devemos ter em mente que um modelo concreto que é significativo para uma criança pode não ter significado para outra, portanto é preciso oferecer modelos diversos e não só os concretos, com vistas a oportunizar a aprendizagem de todas as crianças.

Como registramos anteriormente, este estudo costuma começar através do subconstruto parte-todo, mas este não pode ser o único e nem deve ser priorizado em detrimento dos outros subconstrutos. Para que o conceito de fração seja construído, no sentido mais amplo de construção, devemos apresentar vários subconstrutos, adequados ao ano de escolaridade e à faixa etária dos alunos.

As escolhas do subconstruto e do recurso que comporá a apresentação das frações para os alunos, cabe ao professor. Entretanto, este trabalho vai além desta seleção. Precisamos promover situações de debates, de socialização de hipóteses e soluções para que possamos ouvir os estudantes, fazer intervenções ou mesmo redirecionar seu planejamento. Devemos questionar se o contrato didático das nossas aulas está favorecendo o amadurecimento cognitivo dos nossos alunos.

Na leitura das respostas dos alunos participantes desta pesquisa, percebemos que eles tiveram dificuldades na escrita. Consideramos que estes estudantes estavam começando o segundo ciclo de escolaridade e que uma escrita mais elaborada não poderia ser esperada. Levamos em conta também que, devido à idade, em torno de 10 anos, estas crianças não teriam facilidade em questões abstratas, quer seja pelo estágio cognitivo segundo Piaget (1987), ou pelo nível de domínio cognitivo que a pergunta que fizemos suscitou, conforme Bloom (1956). Mas a questão da dificuldade na escrita pode ser mais ampla do que o que foi assinalado nesta investigação, na medida em que não é comum que se promova a argumentação de ideias nas aulas de matemática, algumas vezes nem oralmente. Contudo, para Behr et al. (1983):

> [...] a ênfase na linguagem oral pode desempenhar um papel intermediário e facilitador para preencher a lacuna, aparentemente, entre a capacidade de um aluno para representar ideias matemáticas com materiais manipulativos e a capacidade para representar as mesmas ideias com simbolismo matemático. (Ibid., p.121)

Podemos compreender, com base nas afirmações de Behr et al. (Ibid.), que a linguagem oral favorece a construção de um conhecimento. Ao possibilitar que um aluno fale sobre suas ideias nas aulas, estamos promovendo o exercício da argumentação, beneficiando a organização do pensamento deste estudante. Depois, registros escritos, que podem ter apoio iconográfico, podem contribuir para que uma argumentação se torne mais consistente.

Outra questão que vai além desta pesquisa e que confirmamos através da revisão bibliográfica é o quanto os professores conhecem sobre a complexidade do conceito de fração. Pesquisadores como Santos (2005), Canova (2006) e Gomes (2010) concluíram que é possível que os professores ainda não tenham consolidado, para eles mesmos, o conceito de fração e recomendam que nas formações continuadas este campo numérico seja estudado. Acreditamos que, para que o docente possa fazer intervenções que promovam aprendizagem, ele precisa, além de saber fazer escolhas quanto à listagem de conteúdos e dos recursos didáticos, conhecer profundamente o conteúdo que está ensinando.

Sabemos que as condições de trabalho docente não favorecem um ensino de qualidade. Turmas com excesso de alunos, baixos salários que fazem com que o professor trabalhe em duas ou mais escolas e exigências relacionadas à meritocracia estão na lista de reclamações e reivindicações destes profissionais. Entretanto, a melhoria do ensino e, consequentemente do desempenho dos alunos, requer também formações que qualifiquem efetivamente a prática dos professores.

Ao escrever estas considerações finais, refiz mentalmente o caminho desta pesquisa. O que eu havia idealizado como tema sofreu mudanças em relação ao que foi possível de ser feito, a realidade imperou. Como mencionei anteriormente, o foco seriam os professores, mas depois as observações se concentraram nos alunos. Limitar estes campos de estudo faz parte da investigação que tem um tempo limitado, mas na verdade eles estão imbricados. E, mesmo não sendo o objetivo, a maneira como as docentes conduziram a aplicação da sequência didática interferiu nos resultados.

O desejo de aprofundar os estudos sobre a prática docente continua, sobretudo em promover pesquisas que estejam relacionadas à formação continuada em serviço.

Termino esta dissertação com a expectativa de ter contribuído com reflexões que desencadeiem outros estudos e novas práticas no ensino de frações. Aos professores e pesquisadores desejo que tenham muitas dúvidas, porque elas incitam a coragem para promover mudanças.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, A. J. O planejamento de pesquisas qualitativas em educação. In: **Cadernos de Pesquisa**, n. 77, p. 53-61, mai 1991. Disponível em: http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/cp/arquivos/797.pdf , Acesso em 30 dez. 2012

BALDIN, Y. Y. O significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. In: **Simpósio Brasil-Japão**. São Paulo, 2009.

BALL, D. L. Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. In: CARPENTER, T.P.; FENNEMA, E.; RONBERG, T.A. (Eds.). **Rational Numbers: An integration of research**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, p. 157-195, 1993.

BARDIN, L. **Análise de conteúdos**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; & SILVER, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**, p. 91-125. New York: Academic Press.

BLOOM, B. S. **Taxonomy of Educational Objectives**: The classification of educational goals. Hardcover: Longman Group United Kingdom. 1956.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental. v.1. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. v.3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CAMPOS, T.; JAHN, A.P.; SILVA, M.C.L.; SILVA, M.J.F. Lógica das Equivalências. **Relatório de Pesquisa não publicado**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1995.

CANOVA, R. F. **Crença, Concepção e Competência dos Professores do 1º e 2º Ciclo do Ensino Fundamental co Relação à Fração.** São Paulo, 2006. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

CARVALHO, J. B. P; LIMA, P. F. O uso do livro didático de Matemática. In: **Coleção Explorando o Ensino**; v.17; p.15-30. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas**: o eloperdido entre o ensino e a aprendizagem. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed. 2001.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

ESTEBAN, M. T. **O que sabe quem erra?** Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar. 3ª ed., Rio de Janeiro: D P & A. 2002.

FELIX, T. F. **Pesquisando a melhoria de aulas seguindo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a metodologia da pesquisa de aulas (Lesson Study).** São Carlos, 2010. 137f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2010.

GOMES, R. Q. G. – **Saberes Docentes de Professores dos Anos Iniciais sobre Frações.** Rio de Janeiro, 2010. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

GUZMAN, M. **The role of games and puzzles in the popularization of mathematics.** L'Enseignement Mathématique 36. p. 359-368. 1990.

HART, K. M.; BROWN, M.L.; KÜCHEMANN, D.E.; KERSLAKE, D.; RUDDOCK, G.; MCCARTNEY, M. **Children´s Understanding of Mathematics: 11-16**. London: John Murray, 1981.

HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.) Research agenda for mathematics education: Number concept and operations in the middle grades. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos**. São Paulo: Scipione, 2002.

IMENES, L. M.; JAKUBO, J. J.; LELLIS, M.. **Novo tempo**: matemática. São Paulo: Scipione, 2001.

ISODA, M. Lesson Study: Problem Solving Approaches in Mathematics Education as a Japanese Experience. In: **International Conference on Mathematics Education Research**. 2010, p.17-27, University of Tsukuba.

KERSLAKE, D. **Fractions: Children´s Strategies and Erros**. A Report of the Strategies and Erros in Secondary Mathematics Project. London: Nfer-Nelson, 1986.

KIEREN, T. E. *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers*. In LESH, R. (Ed.). **Number and measurement***:* Paper from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, p. 101-144, 1976.

______. *Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development*. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). **Number concepts and operations in the middle grades.** Hillsdale, NJ: Erlbaum, p. 162-180, 1988.

______. Rational and Fractional Numbers as Mathematical and Personal knowledge Implications for Curriculum and Instruction. In: LEINHARDT,G. PUTNAM, R. HATTRUP, R. A. (Ed.). **Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, p. 323-366, 1992.

______. **Five faces of mathematical knowledge building**. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alberta, 1981.

LESSA, V. E. **A compreensão do conceito de número fracionário : uma sequência didática para o significado medida**. Porto Alegre, 2011. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.

LOPES, A. J. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2000.

MAGALHÃES, P. D. **Desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática: o método estudo e planejamento de lições nos contextos de escola e ensino.** Belo Horizonte, 2008. 116f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

MALASPINA, M. C. O. **O início do ensino de fração: uma intervenção com alunos da 2ª série do Ensino fundamental**. São Paulo, 2007. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MANDARINO, M. **Concepções de ensino da Matemática elementar que emergem da prática docente**. Rio de Janeiro, 2006. 273 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

______. Números e Operações. In: **Coleção Explorando o Ensino**; v.17; p. 97-242. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

_____. (org.) **Relatório Parcial da Pesquisa**: Jogos e Frações. Um Experimento de Materiais Complementares para as Salas de Aula de Escolas Públicas do Rio de Janeiro. LIMC-Mais, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. jan. 2012.

MERLINI, V.L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MINAYO, M. C. de S. (org.) **Pesquisa Social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Editora Vozes, 2011.

MONTEIRO, C. e COSTA, C. Dificuldades na aprendizagem dos números racionais. **Educação e Matemática**, nº 40, p. 60-63, 1996.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental**. São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

NASSER, L.; SOARES, T. V.; COUTO, S. M. S.; MAIA, V. **Caderno de Apoio Pedagógico - Edição Especial: Frações e Decimais – 6º ao 9º anos.** 2009. Disponível em: http://www0.rio.rj.gov.br/sme/destaques/coordenadoriaEducacao/cadernoEdicaoEspecial.htm , Acesso em 15 jun. 2012.

NEPEM. Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. In: **Revista Horizontes**, Bragança Paulista. v. 22, n. 1, p. 53-64, jan./jun. 2004.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed., 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PIAGET, J. **Seis estudos de Psicologia**. 15ª Ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora Forense Universitária LTDA, 1987.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática**: estudo do erro no ensino da Matemática elementar. Campinas, SP: Papirus. 2000.

PIRES, C. C.; NUNES, M. **Matemática no planeta azul.** São Paulo: FTD, 1998.

PIRES, C. C.; CURY, E.; PIETROPAOLO, R. **Educação matemática.** São Paulo: Atual, 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

ROMANATTO, M. C. Número racional: uma teia de relações. **Zetetiké**, CEMPEM, FE/UNICAMP, v.7, n.12, p.37-49, jul/dez de 1999.

SANTOS, A. **O conceito de frações e seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental.** São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, C. A. **Os Saberes Pedagógicos e a Prática de Professores de Matemática: Uma Relação Possível?.** Teresina, 2010. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Teresinha, 2010.

SANTOS, V. M. dos.; REZENDE, J. F. de. **Números**: linguagem universal. Rio de Janeiro: editora UFRJ, 1996.

SHULMAN, L. S. **The wisdom of practice**: essays on teaching and learning to teach. San Francisco, Jossey-Bass, 2004.

SILVER, A. S. Educating teacher of mathematics: some important challenges and promising directions. Formação de professores de matemática: desafios e direções. Tradução: Orlando de A. Figueiredo. **Bolema**, ano 19, n.26, p.125-152, 2006.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M.; CÂNDIDO, P. **Jogos de Matemática de 1º a 5º ano.** Porto Alegre: Artmed, 2007.

SILVA, V. A. Relação com o saber na aprendizagem matemática: uma contribuição para a reflexão didática sobre as práticas educativas. In: **Revista Brasileira de Educação**. 2008. v. 13 n. 37.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

VASCONCELOS, C.B.; BELFORT, E. Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações. In: **Boletins do Salto para o Futuro**, Discutindo práticas em Matemática. TVE, 2006. Disponível em: http://tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/162048Distutindo.pdf , Acesso em 12 jan. 2012.

VASCONCELOS, I. C. P. Números Fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries do Ensino Fundamental. Porto Alegre, 2007. 103f. . Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

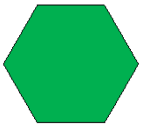
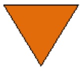
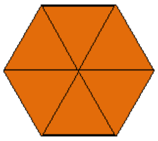
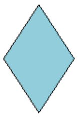
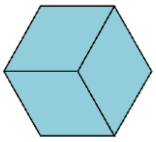
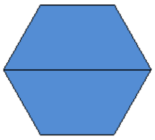
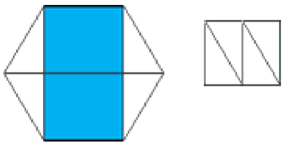
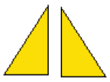
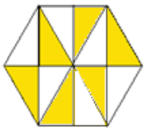
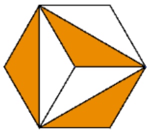
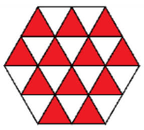
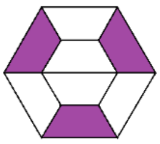
VILLA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar:** o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

WU, H. *Teaching fraction in elementary school: A manual for teachers.* Berkeley, CA: Amer, Math. Soc., 1998. Disponível em: http://math.berkeley.edu/~wu/fractions1998.pdf , Acesso em 02 out. 2012.

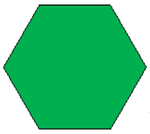
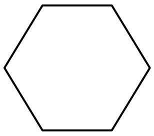
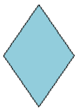
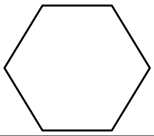
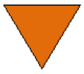
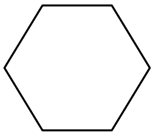
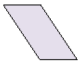
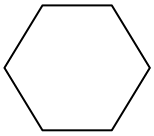
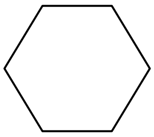
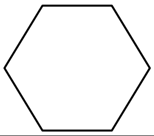
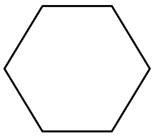
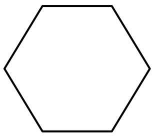
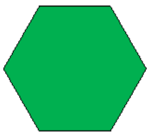
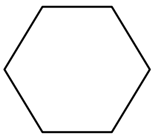
______. *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*, Chapter 2: Fractions. Berkeley, CA: Amer, Math. Soc., 2002. Disponível em: http://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf , Acesso em 02 out. 2012.

Anexos

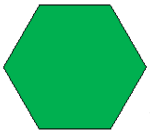
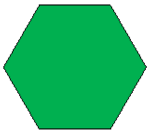
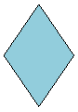
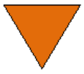
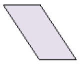
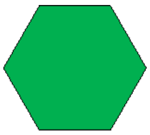
Anexo 1 - O material manipulativo

Peça	**Relação com o Hexágono**	**Quantidade de peças no kit**
	o todo a figura completa	2 Hexágonos regulares
		9 triângulos eqüiláteros grandes
		5 losangos
		3 Trapézios grandes
		5 retângulos médios
		24 triângulos retângulos (12 de cada tipo)
		12 triângulos isósceles e obtusângulos.
		36 triângulos eqüiláteros pequenos
		12 trapézios pequenos

Anexo 2 - Tabela 1: Quantos cabem?

Peça	**Quantos cabem no**  **?**	**Vamos representar?**
		
		
		
		
		
		
		
		
		

Anexo 3 - Tabela 2: Que parte do hexágono?

Peça	**Que parte do**  **?**	**Que fração do**  **?**
		
		
		
		
		
		
		
		
		

Apêndices

APÊNDICE A – Termo de autorização para participação do aluno na pesquisa

AUTORIZAÇÃO PARA PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA NO COLÉGIO PEDRO II

Eu, ____ responsável pelo aluno (a) ____, regularmente matriculado no _____ ano de escolaridade do Ensino Fundamental, no Colégio Pedro II, unidade ____________ venho por meio desta autorizar a participação do referido (a) aluno (a) na pesquisa *"O que revelam as repostas dos estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração quando apresentado através de um modelo que prioriza o subcontruto parte-todo"* realizada pela professora Teresinha Valente Soares e coordenada pela professora doutora Mônica C. F. Mandarino através do PPGE – UNIRIO. Tenho conhecimento que sua participação será filmada e que as imagens não serão usadas em veículos de comunicação de qualquer espécie, sendo utilizadas exclusivamente pelas pesquisadoras em seus trabalhos acadêmicos.

____

Assinatura do Responsável

____

Nº do Documento de Identidade

APÊNDICE B – Termo de consentimento informado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Humanas e Sociais - CCH
Programa de Pós-Graduação em Educação – Mestrado

Termo de Consentimento Informado
Documentos, Registros e Entrevistas

A professora Teresinha Valente Soares, aluna do PPGE da UNIRIO, desenvolve a pesquisa: “*O que revelam as repostas dos estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração quando apresentado através de um modelo que prioriza o subcontruto parte-todo*” sob a orientação da Profª Drª Mônica C. F. Mandarino e como parte das exigências do Mestrado em Educação.
A professora Teresinha Valente Soares compromete-se a esclarecer qualquer dúvida ou questionamento que os participantes venham a ter através do e-mail tevalente@hotmail.com ou telefone 8873-9488.

Após ter sido devidamente informada(o) dos objetivos desta pesquisa, eu ____, concordo em participar desta, cedendo o material descrito para utilização na pesquisa, em relatórios e publicações decorrentes deste estudo

Sobre a informação da(o) cedente do material nos relatórios e publicações da pesquisa, a mesma é opcional e seu consentimento em ceder o material não é afetado pela sua opção de ser ou não identificada(o) nas divulgações associadas a este trabalho:
( ) Concordo com a minha identificação na utilização das informações em relatórios referentes a esta pesquisa.
( ) Não concordo com a minha identificação na utilização das informações em relatórios referentes a esta pesquisa.

Rio de Janeiro, _____ de _______________________ de 2012.

____
Participante

____
Nº do Documento de identificação

____
E-mail e telefone